Serie 11 – Lösungsvorschläge

1. Sei $X := [0,1], \mathcal{B} \subset 2^X$ Borel σ-Algebra und $\lambda : \mathcal{B} \to [0,1]$ die Restriktion des Lebesguemasses auf $\mathcal{B}$ (d.h., $\lambda = m|_{\mathcal{B}}$). Sei $\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ das Zählmass.
Zeigen Sie:

$\lambda \ll \mu$ und

$\nexists f\colon X \to [0,\infty]$ Borel-messbar, so dass $\lambda(B) = \int_B f \,\mathrm{d}\mu, \qquad B \in \mathcal{B}.$

Bem.: Damit sehen wir, dass auf die Bedingung im Satz von Radon-Nikodým, dass die beiden Masse σ-endlich sind, nicht verzichtet werden kann.

Lösungsvorschlag:

Wir erinnern, dass ein Mass λ genau dann absolut stetig bzgl. eines anderen Masses μ ist ($\lambda \ll \mu$), wenn $\mu(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0, \forall A \in \mathcal{A}$ gilt.

Dies ist hier offensichtlich der Fall:

$$\mu(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset \Rightarrow \lambda(A) = 0,$$

also ist $\lambda \ll \mu$.

Wir zeigen die Behauptung, indem wir die gegenteilige Annahme auf einen Widerspruch führen.

Angenommen es gäbe eine Borel-messbare Funktion $f\colon [0,1] \to [0,\infty]$ so dass

$$\lambda(B) = \int_B f \,\mathrm{d}\mu, \quad B \in \mathcal{B}.$$

Dann folgt daraus $\forall B \in \mathcal{B}$

$$1 = \lambda([0,1])$$

Bitte wenden!

$$
\begin{aligned}
&\geq \lambda(B) \\
&= \int_B f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \sup_{\substack{s \leq f \\ s \text{ Trp-fkt}}} \int_B s \,\mathrm{d}\mu \\
&= \sup_{\substack{s \leq f \\ s \text{Trp-fkt}}} \{\sum_{i \in \mathbb{N}} f(\alpha_i)\mu(s^{-1}(\alpha_i) \cap B)\}
\end{aligned}
$$

Da X das Einheitsintervall ist, kann der letzte Ausdruck nur dann für alle $B \in \mathcal{B}$ endlich (und insbesondere kleiner 1) sein, wenn f bis auf eine μ-Nullmenge gleich der Nullfunktion ist. Da $\emptyset$ die einzige μ-Nullmenge ist, heisst das sogar

$$f \overset{!}{\equiv} 0.$$

Dann kann aber nicht

$$\lambda(B) = \int_B f \,\mathrm{d}\mu, \quad B \in \mathcal{B}$$

sein, also Widerspruch! Es gibt somit kein solches f. □

2. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und μ σ-endlich. Sei $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Mass. Zeigen Sie:

$$\lambda(A) = \sup_{\substack{E \in \mathcal{A} \\ \mu(E) < \infty}} \lambda(A \cap E), \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Lösungsvorschlag:

Es gilt per Def.:

$$\mu\,\sigma\text{-endlich} :\Leftrightarrow \exists X_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N} \text{ so dass}$$
$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \text{ und } X_i \subset X_{i+1}, \mu(X_i) < \infty, \forall i \in \mathbb{N}$$

Damit ist

$$\lambda(A) = \lim_{i \to \infty} \lambda(A \cap X_i) = \sup_{\substack{E \in \mathcal{A} \\ \mu(E) < \infty}} \lambda(A \cap E), \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

□

Siehe nächstes Blatt!

3. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Finden Sie ein Beispiel zweier Masse λ, μ und zweier Funktionen f, g auf X, so dass

$$\lambda(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_A g \,\mathrm{d}\mu, \qquad \forall A \in \mathcal{A},$$

aber

$$f \neq g.$$

Lösungsvorschlag:

Sei $\emptyset \neq X$ und $\mathcal{A} := \{\emptyset, X\}$. Wir betrachten die zwei Masse μ und λ mit

$$\mu(X) = \lambda(X) = \infty,$$
$$\mu(\emptyset) = \lambda(\emptyset) = 0,$$

und die beiden Funktionen f, g mit $f(x) := 1$ und $g(x) := 2$, $\forall x \in X$. Dann ist $\lambda(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_A g \,\mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$ erfüllt, wie man direkt sieht. Hingegen ist nach Def. der Funktionen

$$f \neq g.$$

4. Sei $X := [0, \infty)$, $B \subset 2^X$ Borelsche σ-Algebra und $\lambda \colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ die Restriktion des Lebesguemasses auf $\mathcal{B}$. Seien zwei weitere Masse definiert durch

$$\mu_1(B) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \int_{B \cap [n, n+1)} x \,\mathrm{d}\lambda,$$
$$\mu_2(B) := \int_{B \cap [1, \infty)} x^{-2} \,\mathrm{d}\lambda,$$

$\forall B \in \mathcal{B}$.

Zeigen Sie:

a) μ_1 und μ_2 sind endliche Masse.

b) $\mu_1 \ll \lambda$ und $\mu_2 \ll \lambda$.

c) $\mu_1 \ll \mu_2$ und $\mu_2 \ll \mu_1$.

d) $\lambda \not\ll \mu_1$ und $\lambda \not\ll \mu_2$.

Bitte wenden!

Lösungsvorschlag:

a) Die Endlichkeit der beiden Funktionen erhalten wir direkt durch

$$\begin{aligned}\mu_1(X) = \mu_1([0,\infty)) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \int\limits_{[0,\infty)\cap[n,n+1)} x \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \int_n^{n+1} x \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3} = \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{2} \frac{2n+1}{n^3} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3}) \\ &= \frac{1}{2}(3 + \frac{5}{8} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3}) \leq \frac{1}{2}(3 + \frac{5}{8} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{=\frac{\pi^2}{6} \text{ geom.Reihe}}) < \infty.\end{aligned}$$

$$\mu_2(X) = \mu_2([0,\infty)) := \int\limits_{[0,\infty)\cap[1,\infty)} x^{-2} \,\mathrm{d}\lambda = \int_1^{\infty} x^{-2} \,\mathrm{d}\lambda = 1.$$

Also sind die beiden Masse endlich.

b) $\forall B \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}\lambda(B) = 0 \Rightarrow \int\limits_{B\cap[n,n+1]} x \,\mathrm{d}\lambda = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \mu_1(B) = 0. \\ \lambda(B) = 0 \Rightarrow \int\limits_{B\cap[1,\infty)} x^{-2} \,\mathrm{d}\lambda = 0 \\ \Rightarrow \mu_2(B) = 0.\end{aligned}$$

c) $\forall B \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}\mu_1(B) = 0 :\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \int\limits_{B\cap[n,n+1)} x \,\mathrm{d}\lambda = 0 \\ \Leftrightarrow \int\limits_{B\cap[n,n+1)} x \,\mathrm{d}\lambda = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{(alle Reihenglieder sind nach Vorauss. nichtnegativ)} \\ \Leftrightarrow \int\limits_{B\cap[1,\infty)} x \,\mathrm{d}\lambda = 0\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\Leftrightarrow \int\limits_{B\cap[1,\infty)} x^{-2}\,\mathrm{d}\lambda = 0$$

(beachte: $0 \le 1/x^2 \le 1/x, \forall x \in B \cap [1,\infty)$)

$$:\Leftrightarrow \mu_2(B) = 0.$$

d) Um dies zu sehen, betrachte man $[0,1) \in \mathcal{B}$. Dann ist

$$\lambda([0,1)) = 1$$

und wegen

$$\mu_1([0,1)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \int\limits_{[0,1)\cap[n,n+1)} x\,\mathrm{d}\lambda = 0$$

und

$$\mu_2([0,1)) = \int\limits_{[0,1)\cap[1,\infty)} x^{-2}\,\mathrm{d}\lambda = 0$$

haben wir sowohl $\mu_1(B) = 0 \not\Rightarrow \lambda(B) = 0$ als auch $\mu_2(B) = 0 \not\Rightarrow \lambda(B) = 0$.

5. Sei $X := [1,\infty), \mathcal{B} \subset 2^X$, Borel σ-Algebra und $\mu\colon \mathcal{B} \to [0,\infty)$ die Restriktion des Lebesguemasses auf $\mathcal{B}$. Sei $f\colon X \to [0,\infty)$ Borel-messbar und sei $\lambda(B) := \int\limits_B f\,\mathrm{d}\mu, B \in \mathcal{B}$ mit $\lambda \ll \mu$. Wir bezeichnen $\alpha B := \{\alpha b \mid b \in B\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie: Gilt

$$\lambda(B) = \alpha\lambda(\alpha B), \qquad \forall B \in \mathcal{B}, \forall \alpha \ge 1,$$

dann gibt es ein $c \ge 0$, so dass

$$f(x) = \frac{c}{x^2}, \qquad \text{f.ü..}$$

Lösungsvorschlag:

Sei $x \ge 1$,

$$xB := \{xb \mid b \in B\}$$

und $B \in \mathcal{B}$. Nach Voraussetzung gilt

$$\lambda(B) = x\lambda(xB)$$

Bitte wenden!

$$= x \int_{xB} f \, \mathrm{d}\mu,$$

und

$$\lambda(B) = \int_B f \, \mathrm{d}\mu$$

für ein $f\colon X \to [0, \infty)$, also

$$\int_B f \, \mathrm{d}\mu = x \int_{xB} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Betrachten wir in dieser Gleichheit speziell $B := [1, y], y \geq 1$, dann folgt

$$\begin{aligned}
&\int_1^y f(t) \, \mathrm{d}t = x \int_x^{xy} f(t) \, \mathrm{d}t \\
&\Rightarrow F(y) - \underbrace{F(1)}_{=0} = x(F(xy) - F(x)), \qquad \big| \text{ HS d. Diff.- u. Integralrechn.} \\
&\Rightarrow f(y) = x^2 f(xy), \qquad \big| \text{ Abl. nach } y \\
&\Leftrightarrow f(xy) = \frac{f(y)}{x^2} \\
&\underset{y:=1}{\Rightarrow} f(x) = \frac{f(1)}{x^2} = \frac{c}{x^2}, \qquad \text{f.ü.},
\end{aligned}$$

wobei $c := f(1)$ die gesuchte Konstante ist.

6. **a)** Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ mit $\mathcal{B} \subset 2^X$ Borelsche σ-Algebra und $\lambda = m|_{\mathcal{B}}\colon X \to [0, \infty]$ die Restriktion des Lebesguemasses auf $\mathcal{B}$. Zeigen Sie:

$$B \in \mathcal{B}, 0 < c < \lambda(B) \Rightarrow \exists A \in \mathcal{B}, A \subset B, \text{ so dass } \lambda(A) = c.$$

b) Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ für ein Mass $\mu\colon X \to [0, \infty]$, $\mathcal{B} \subset 2^X$ Borelsche σ-Algebra und sei $\lambda = m|_{\mathcal{B}}$ die Restriktion des Lebesguemasses auf $\mathcal{B}$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
&\exists c > 0 : (\lambda(B) = c \Rightarrow \mu(B) = c, \forall B \in \mathcal{B}) \\
&\Rightarrow \mu \ll \lambda.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Lösungsvorschlag:

a) Sei $B \in \mathcal{B}$.

Fall B beschränkt:

Dann ist $B \subset [a,b]$ für irgendwelche $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > a$. Wir betrachten die Intervalle

$$[a,t], \qquad a < t < b$$

und die Masse

$$\mu(B \cap [a,t]), \text{ für } a < t < b.$$

Wegen $\lim\limits_{t \to b} \mu(B \cap [a,t]) = \mu(B)$, $\lim\limits_{t \to a} \mu(B \cap [a,t]) = 0$ und der Monotonie des Masses gilt $\forall a < t < b$

$$0 < \mu(B \cap [a,t]) < \mu(B).$$

Wir müssen zeigen, dass $\mu(B \cap [a,t])$ stetig von t abhängt. Dazu zeigen wir, dass $\mu(B \cap [a,t])$ Lipschitz-stetig ist, d.h., dass es ein $L \geq$ gibt mit

$$|\mu(B \cap [0,t]) - \mu(B \cap [0,s])| \leq L|t-s|, \qquad \forall s,t, \text{ mit } a < s, t < b,$$

woraus dann die Stetigkeit folgt.

Sei $0 \leq s, t \leq b$ und $s \neq t$, da sonst trivialerweise erfüllt. Sei oBdA $s < t$. Dann ist

$$|\mu(B \cap [a,t]) - \mu(B \cap [a,s])| = |\mu(B \cap [s,t])| \leq \mu([s,t]) = |t-s| < b - a =: L.$$

Fall B nicht beschränkt:

Dann ist $\lim\limits_{t \to \infty} \mu(B \cap [-t.t]) = \mu(B)$ und mit analogem Argument kann gezeigt werden, dass $\mu(B \cap [-t.t])$ stetig von t abhängt.

b) Wir erhalten für alle $B \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \lambda(B) = 0 &\Rightarrow \lambda(B^c) = \infty \\ &\underset{a)}{\Rightarrow} \forall c > 0 \, \exists A \in \mathcal{B}, A \subset B^c \subset \mathbb{R} \colon c = \lambda(A) \\ &\Rightarrow \mu(A) = c \end{aligned}$$

und weiter

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) = c + 0 = c \qquad \Big| \text{ da } A \cap B = \emptyset.$$

Also wieder aufgrund der Voraussetzung

$$\mu(A) + \mu(B) = c \Rightarrow \mu(B) = 0. \qquad \Big| \text{ da } \mu(A) = \lambda(A) = c.$$

Damit ist $\mu \ll \lambda$.