Serie 1

1. Sei U ein Untervektorraum von V und U' ein Komplement zu U in V. Zeige, dass dann gilt:

a) U' trifft jede Nebenklasse von U in genau einem Punkt.

b) Die lineare Abbildung $\pi|_{U'} : U' \to V/U\ ,\ x \mapsto x + U$ ist ein Isomorphismus.

2. In dieser Aufgabe schreiben wir Elemente von $\mathbb{R}^2$ als Spaltenvektoren und Elemente von $(\mathbb{R}^2)^*$ als Zeilenvektoren. Sei $\mathcal{A}$ die Basis

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

von $\mathbb{R}^2$.

a) Finde die Basis von $(\mathbb{R}^2)^*$, die zu $\mathcal{A}$ dual ist.

b) Bestimme explizit den Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)^*$, $x \mapsto y$, der durch $\mathcal{A}$ induziert wird, in der Form

$$y = x^T B.$$

3. Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und

$$V := \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \mid \lambda_i \in \mathbb{K},\ \text{alle ausser endlich viele } \lambda_i\text{'s verschwinden}\ \}.$$

Zeige:

a) Die Vektoren $e_i := (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots)$ (mit der 1 in der i-ten Koordinate) sind eine Basis von V.

b) Die durch

$$\varepsilon^j(e_i) := \delta_{ij}, \quad i, j \in \mathbb{N},$$

definierten Vektoren $\varepsilon^j \in V^*$ sind *keine* Basis von V^*.

c) V^* ist isomorph zu

$$W := \{(\mu_1, \mu_2, \ldots) \mid \mu_j \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$

Bitte wenden!

4. Zeige, dass die Determinante einer 2×2 - Matrix A genau dann null ist, wenn A nicht invertierbar ist.

5. **a)** Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Die Determinante der Matrix

$$M(x) := \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$$

ist ein Polynom in der Variable $x \in \mathbb{C}$. Bestimme die Nullstellen dieses Polynoms und versuche einen Zusammenhang mit der linearen Unabhängigkeit der Zeilenvektoren von $M(x)$ (die auch von x abhängt) zu finden.

6. *Datensicherung mit einem RAID System.* In einem Gerät zur Datensicherung befinden sich drei Festplatte und auf jeder dieser Festplatten können N Bits abgespeichert werden. Wir speichern nun $2N$ Bits $(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots .y_N)$ wie folgt auf die drei Festplatten:

Festplatte 1:	Festplatte 2:	Festplatte 3:
x_1	y_1	$z_1 := x_1 + y_1$
x_2	y_2	$z_2 := x_2 + y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Wenn eine der drei Festplatten ausfällt, können wir damit alle $2N$ Bits rekonstruieren.

Bemerkung: Ein Bit kann die Werte 0 oder 1 annehmen. Folglich können wir Bits als Elemente von $\mathbb{F}_2$, dem Körper mit zwei Elementen, betrachten.

Sei nun N eine gerade Zahl und wir betrachten ein Gerät mit vier Festplatten, wobei auf jeder Festplatte N Bits abgespeichert werden können. Wieviele Bits können wir auf dem Gerät abspeichern, sodass wir auch bei einem Ausfall von zwei Festplatten den gesamten Inhalt rekonstruieren können?

Festplatte 1:	Festplatte 2:	Festplatte 3:	Festplatte 4:
x_1	y_1	$z_1 = ?$	$w_1 = ?$
x_2	y_2	$z_2 = ?$	$w_2 = ?$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$