MC-Fragen Serie 10

Einsendeschluss: Montag, der 05.05.2014, 17:00 Uhr

---

1. Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume, und $f\colon V \to W$ linear. Kreuze die richtigen Aussagen an.

(a) $\mathrm{Ker}(f)$ ist ein Untervektorraum von V.

(b) $\mathrm{Im}(f)$ ist ein Untervektorraum von W.

(c) $\dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim V$.

(d) Falls $V = W$, dann ist $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = V$.

2. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardbasis gegeben durch die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche Aussagen sind korrekt?

(a) $\mathrm{Rang}(A) = 3$.

(b) Bezüglich der Basen

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$
$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^3$ ist f gegeben durch:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Es gibt Basen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ mit $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(f) = I$.

3. Betrachte die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (3x+2y-z, x+y)$. Kreuze die richtigen Aussagen an.

(a) Die Matrix von f bezüglich der Standardbasen ist $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Die Matrix von f bezüglich der Standardbasen ist $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $\dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f) = 2$.

(d) $\mathrm{Rang}(f) = \dim(\mathrm{Im} f) = 2$

(e) $(1,-1,1)^T \in \mathbb{R}^3$ ist ein Eigenvektor vom f zum Eigenwert 0.

4. Sei A eine $l \times k$, B eine $m \times l$ Matrix. Betrachte die Verknüpfung

$$BA : \mathbb{R}^k \xrightarrow{A} \mathbb{R}^l \xrightarrow{B} \mathbb{R}^m.$$

Welche Aussagen sind korrekt?

(a) $\mathrm{Rang}(BA) \leq \min(k, m)$.

(b) $\mathrm{Rang}(BA) \leq \mathrm{Rang}(B)$.

(c) $\mathrm{Rang}(BA) \leq \mathrm{Rang}(A)$.

(d) $\mathrm{Rang}(BA) = \min(\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B))$.

5. Betrachte:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 3 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 10 & 0 \\ 6 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 10 & 0 \\ 8 & 9 & 10 & 0 & 0 \\ 11 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) $\det A = -1000$.

(b) $\det A = 1000$.

(c) $\det B = -10000$.

(d) $\det B = 10000$.

(e) $\det C = -100000$.

(f) $\det C = 100000$.

6. Kreuze die richtigen Aussagen an.

(a) Seien $p, q \neq 0$ zwei Polynome mit rellen Koeffizienten so, dass $p(t_i) = q(t_i)$ für paarweise verschiedene $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, $n = \deg p$. Dann gilt $p = q \in \mathbb{R}[t]$.

(b) Wenn $p(t_i) = q(t_i)$ für unendlich viele $t_i \in \mathbb{R}$, dann ist $p = q \in \mathbb{R}[t]$.

7. Es bezeichne $\mathbb{F}_7$ den Körper mit den sieben Elementen $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und mit den folgenden Tabellen für Addition und Multiplikation:

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Kreuze die richtigen Aussagen an.

(a) Für alle $a \in \mathbb{F}_7$ ist $a^7 = a$.

(b) Es ist $t^7 = t$ in $\mathbb{F}_7[t]$, also Gleichheit als Polynome.

8. Kreuze die richtigen Aussagen an.

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $p \in \mathbb{C}[t]$, dann ist $\overline{\alpha}$ ebenfalls eine Nullstelle.

(b) Jedes reelle Polynom von Grad 7 hat eine reelle Nullstelle.

9. Betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Der einzige Eigenwert ist -2.

(b) Der einzige Eigenwert ist 2.

(c) $A^T = A$.

(d) A diagonalisierbar.

10. Kreuze die richtigen Aussagen an.

(a) Jede reelle quadratische Matrix ist diagonalisierbar.

(b) Jede komplexe quadratische Matrix ist diagonalisierbar.

(c) Jede reelle symmetrische Matrix ist diagonalisierbar.

(d) Jede komplexe Matrix A mit $A^T = A$ ist diagonalisierbar.

(e) Jede unitäre Matrix ist diagonalisierbar.

(f) Jede hermitesche Matrix ist diagonalisierbar.

11. Sei A eine hermitesche Matrix. Welche Aussagen sind korrekt?

(a) $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{R}$.

(b) $\det A \in \mathbb{R}$.

12. Sei A eine komplexe $n \times n$ Matrix mit 2 als einzigen Eigenwert. Dann ist $A = 2 \cdot I$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

13. Sei A eine hermitesche $n \times n$ Matrix, mit 2 als einzigen Eigenwert. Dann ist $A = 2 \cdot I$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

14. Seien

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) (v_1, v_2, v_3) ist eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich dem Standardskalarprodukt.

(b) Es gibt eine reelle 3×3 Matrix A mit Eigenvektoren v_k zu $\lambda_k = k, \quad k = 1, 2, 3$.

(c) Das gleiche mit A symmetrisch.

(d) Falls A symmetrisch ist und die Eigenvektoren v_k hat, dann liegen v_2 und v_3 im gleichen Eigenraum.

15. Sei A eine orthogonale 7×7 Matrix. Dann gilt allgemein:

(a) 1 ist ein Eigenwert von A.

(b) $\det A$ ist ein Eigenwert von A.

(c) Die Spur von A ist zwischen -7 und 7.

(d) Die Determinante von A ist 1 oder -1.

(e) Es gibt eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ die aus Eigenvektoren von A besteht.

16. Seien A, B komplexe, selbstadjungierte $n \times n$ Matrizen, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt allgemein:

(a) $A + B$ ist selbstadjungiert.

(b) λA ist selbstadjungiert.

(c) λA ist normal.

17. Seien A, B komplexe, selbstadjungierte $n \times n$ Matrizen, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt allgemein:

(a) AB ist selbstadjungiert.

(b) $AB + BA$ ist selbstadjungiert.

(c) $AB - BA$ ist normal.

(d) ABA ist selbstadjungiert.

18. Sei s_A folgende Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$: $s_A(x,y) = x^{\mathrm{T}}Ay$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) s_A ist eine nicht-ausgeartete Bilinearform.

(b) Die Signatur von s_A ist $(1,1)$.

(c) Die Signatur von s_A ist $(2,0)$.

(d) Die Signatur von s_A ist $(0,2)$.

19. Sei s_B folgende Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$: $s_B(x,y) = x^{\mathrm{T}}By$, wo

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) s_B ist eine nicht-ausgeartete Bilinearform.

(b) Die Signatur von s_B ist $(1,1)$.

(c) Die Signatur von s_B ist $(1,0)$.

(d) Die Signatur von s_B ist $(0,1)$.

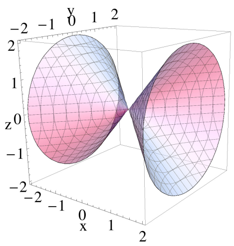
20. Sei s die Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$s((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + yy' - zz'.$$

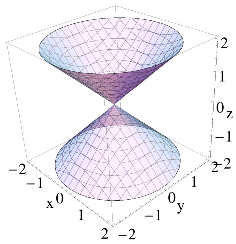
Welches der folgenden Bilder ist eine Darstellung der Quadrik

$$C_0 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid s(v,v) = 0\}?$$

(a) .



(b) .



(c) .