Serie 12

1. Es seien V_1, V_2, W_1 und W_2 $\mathbb{K}$-Vektorräume mit linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi &: V_1 \longrightarrow V_2, \\ \psi &: W_1 \longrightarrow W_2. \end{aligned}$$

Zeige, dass es eine kanonische lineare Abbildung

$$\varphi \otimes \psi : V_1 \otimes W_1 \longrightarrow V_2 \otimes W_2$$

gibt, welche $(\varphi \otimes \psi)(v \otimes w) = \varphi(v) \otimes \psi(w)$ erfüllt, für alle $v \in V_1, w \in W_1$.

2. Seien $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig in einem Vektorraum V. Zeige, dass

$$\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k) = \{x \in V \mid v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge x = 0\}.$$

3. Sei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Definiere den Isomorphismus $\varphi : \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\varphi(e_1 \wedge e_2) = e_3, \quad \varphi(e_2 \wedge e_3) = e_1, \quad \varphi(e_3 \wedge e_1) = e_2.$$

Zeige: Für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ gilt $\varphi(u \wedge v) = u \times v$.

4. **a)** Im $\mathbb{R}^3$ seien zwei windschiefe Geraden L_1 und L_2 gegeben. Beschreibe, wie man den Abstand zwischen L_1 und L_2 definiert und gib ein Verfahren an, wie man diesen ausrechnen kann.

b) Berechne den Abstand der folgenden beiden Geraden:

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; \begin{matrix} x + y + z = 0 \\ x + y = -3 \end{matrix} \right\}.$$

Bitte wenden!

5. Eine bilineare Abbildung $\xi : V \times V \longrightarrow W$ heisst *symmetrisch*, falls für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt, dass $\xi(v_1, v_2) = \xi(v_2, v_1)$.

a) Zeige: Für jeden $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit $\dim(V) = n$ gibt es einen $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathrm{Sym}^2(V)$ zusammen mit einer symmetrischen, bilinearen Abbildung

$$s : V \times V \longrightarrow \mathrm{Sym}^2(V),$$

welche die folgende universelle Eigenschaft erfüllen: Zu jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum W zusammen mit einer symmetrischen, bilinearen Abbildung $\xi : V \times V \longrightarrow W$ gibt es genau eine lineare Abbildung ξ_s, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sym}^2(V) \arrow[dr, dotted, "\exists\, \xi_s"] & \\ V \times V \arrow[u, "s"] \arrow[r, "\xi"'] & W \end{tikzcd}$$

Den Raum $\mathrm{Sym}^2(V)$ nennt man das *symmetrische Produkt*.

b) Welche Dimension hat $\mathrm{Sym}^2(V)$?

Siehe nächstes Blatt!

6. Online-Abgabe

1. Die Wahl der (geordneten) Basis

$$(e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2)$$

von $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ gibt einen Isomorphismus $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$ ($e_1 \otimes e_2 \leftrightarrow e_1$,$e_1 \otimes e_2 \leftrightarrow e_2$,...)
Was sind die Koordinaten von $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis ?

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Welche der folgenden Ausdrücke sind für allgemeine Vektoren $\alpha, \beta, \gamma \in V$ von null verschieden?

(a) $(\alpha - \beta) \wedge (\alpha + \beta)$,

(b) $(\alpha - \beta) \wedge (\beta - \gamma) \wedge (\gamma - \alpha)$,

(c) $(\beta - \alpha) \wedge (\gamma - \alpha) + (\alpha + \gamma) \wedge \gamma - \beta \wedge \gamma$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 19. Mai 2014 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.