Manfred Einsiedler

Serie 13

1. Sei $x(t)$ die Auslenkung zur Zeit t des Massenpunktes in einer gedämpften Schwingung mit der Widerstandskonstate $\mu \geq 0$ und der Konstante ω. (ω ist die Schwingungsfrequenz im ungedämpften Fall $\mu = 0$.) Dann ist $x(t)$ Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x'' + 2\mu x' + \omega^2 x \;=\; 0. \tag{1}$$

a) Reformuliere das Problem (1) in eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung der Form

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wobei $y := x'$ ist.

b) Ein guter Ansatz für die Lösung von System (2) ist

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} := e^{\lambda t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass $(x(t), y(t))$ genau dann eine Lösung von (2) ist, wenn (x_0, y_0) ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist (Achtung: die Lösung kann durchaus auch komplex sein!). Man unterscheidet die folgenden Fälle:

- Die ungedämpfte Schwingung, $\mu = 0$.
- Die schwache Dämpfung, $0 < \mu < \omega$.
- Der aperiodische Grenzfall, $\mu = \omega$.
- Die starke Dämpfung, $\mu > \omega$.

c) Im Fall der starken Dämpfung, $\mu > \omega$, ist die Matrix A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar. Gib eine Eigenbasis in $\mathbb{R}^2$ von A an und finde eine Basis für den Lösungsraum von (1). Wie sehen die Lösungen aus (Skizze)?

d) Im Fall der schwachen Dämpfung, $0 < \mu < \omega$, ist die Matrix A nicht mehr über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar, aber über $\mathbb{C}$. Gib eine Eigenbasis in $\mathbb{C}^2$ von A an und finde eine Basis für den (reellen!) Lösungsraum von (1). Wie sehen diese aus (Skizze)?

Bitte wenden!

e) Löse nun das folgenden Anfangswertproblem im Fall der schwachen Dämpfung ($0 < \mu < \omega$)

$$\begin{aligned} x'' + 2\mu x' + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = 1, x'(0) = 0. \end{aligned}$$

2. Bestimme die Lösung $f \in C^2([0,\infty))$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) - \frac{d}{dt} f(t) - 2f(t) = -6e^t, \quad f(0) = 1, \quad \frac{d}{dt} f(0) = 2.$$

3. **a)** Sei

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

ein Jordanblock der Grösse k zum Eigenwert λ. Zeige

$$M^n = (m_{n;ij})_{i,j} \text{ mit } m_{n;ij} = \begin{cases} 0, & j < i \text{ oder } n < (j-i), \\ \binom{n}{j-i} \lambda^{n-(j-i)}, & j \geq i \text{ und } n \geq (j-i), \end{cases}$$

also die Matrix mit λ^n auf der Diagonalen und $\binom{n}{r}\lambda^{n-r}$ auf der r-ten Nebendiagonalen:

$$\begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \dots & & \\ 0 & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \dots & \\ 0 & 0 & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & & \dots & & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrix, von der in der Aufgabe 1 der Serie 7 bereits die Jordannormalform berechnet wurde. Berechne damit **i)** A^{10} und **ii)** $\exp(A)$.

Siehe nächstes Blatt!

4. Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit Vielfachheiten $r_1, \dots, r_k$ und Invarianten $s_{l,j}$ (Anzahl der Jordanblöcke der Länge l zum Eigenwert λ_j; Vgl. Notation in Fischers *Lineare Algebra*.)

a) Seien $m_j := \max\{l \mid s_{l,j} > 0\}$ die maximalen Grössen der Jordanblöcke und

$$P_{\min}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}.$$

Zeige, dass $P_{\min}(F) = 0$ gilt.

Hinweis: Verwende die Jordannormalform.

b) Zeige, dass es kein Polynom $Q \neq 0$ von kleinerem Grad als $P_{\min}$ gibt, so dass $Q(F) = 0$ gilt.

Bemerkung: Man nennt $P_{\min}$ deshalb auch das *Minimalpolynom* von F.

Bitte wenden!

5. Online-Abgabe

1. Die komplexe $n \times n$ Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn

$$E_\lambda = H_\lambda$$

für alle Eigenwerte λ, wo E_λ bzw. H_λ die Eigen- bzw. Haupträume sind.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

2. Die komplexe $n \times n$ Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom von A gleich dem charakteristischen Polynom von A ist.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Das Minimalpolynom von A ist:

(a) ein Teiler von $(t-9)^6$.

(b) $(t-9)^3$.

(c) $(t-9)^2$.

(d) $(t-9)$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 26. Mai 2014 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.