Serie 2

1. **a)** Seien $A \in M_n(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Zeige, dass $\mathrm{Tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{Tr}(A)$. Folgere daraus, dass für einen endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{Hom}(V, V) \to \mathbb{K}$$

unabhängig von der Wahl einer Basis definiert werden kann.

Bemerkung: Für ein $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ ist $\mathrm{Tr}(\varphi) := \mathrm{Tr}(A_\varphi)$, wobei A_φ eine Matrixdarstellung von φ bezüglich einer beliebig gewählten Basis von V ist.

b) Seien V und W endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeige, dass $\mathrm{Hom}(V, W)^*$ kanonisch isomorph zu $\mathrm{Hom}(W, V)$ ist, wobei der Isomorphismus wie folgt definiert ist: Ein Element $\psi \in \mathrm{Hom}(W, V)$ wird auf die Abbildung

$$\begin{aligned} f_\psi : \mathrm{Hom}(V, W) &\to \mathbb{K} \\ \varphi &\mapsto \mathrm{Tr}(\varphi \circ \psi) \end{aligned}$$

aus $\mathrm{Hom}(V, W)^*$ abgebildet. Insbesondere ist $\mathrm{Hom}(V, V)$ kanonisch isomorph zu $\mathrm{Hom}(V, V)^*$.

2. Seien V und W zwei endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeige, dass $\mathrm{Hom}(V, W)$ kanonisch isomorph zu $\mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ ist und gib den kanonischen Isomorphismus an.

3. Zeige, dass die "Regel von Sarrus" für Matrizen $A \in M_4(\mathbb{K})$ nicht gilt.

4. Zeige anhand der beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

dass die Regel $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ im Allgemeinen nicht gilt.

Bitte wenden!

5. Berechne die Determinante der 5×5-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ und $\varphi \in \mathrm{Alt}_n(V)$. Zeige:

a) Die Abbildung

$$\varphi' : V^n \to \mathbb{K}, (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \varphi(v_1, \ldots, \alpha(v_i), \ldots, v_n)$$

ist in $\mathrm{Alt}_n(V)$.

b) Sei nun $\dim(V) = n$. Ist β eine beliebige Basis von V, so gilt $\varphi' = \mathrm{Tr}(M_{\beta\beta}(\alpha))\varphi$, wobei $M_{\beta\beta}(\alpha)$ die Matrixdarstellung von α bezüglich der Basis β bezeichnet.

Abgabe: Montag, den 3. März 2014 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.