Serie 3

1. Seien $v = (v_1, v_2)$ und $w = (w_1, w_2)$ zwei verschiedene Punkte des $\mathbb{R}^2$ und $L \subset \mathbb{R}^2$ die Gerade durch v und w. Zeige, dass dann gilt:

$$L = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

2. Die Zahlen 2014, 4187, 5459, und 8321 sind alle durch 53 teilbar. Zeige ohne zu rechnen, dass auch

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 8 & 7 \\ 5 & 4 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

durch 53 teilbar ist.

3. Beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Diese Determinante wird auch die *Vandermonde-Determinante* genannt.

4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{Z})$. Zeige, dass es genau dann ein $B \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{Z})$ mit $AB = I$ gibt, wenn $\det A = \pm 1$ ist.

5. Berechne die Determinante der 175×175-Matrix $C = (c_{kl})_{k,l=1,\dots,175}$, wobei

$$c_{kl} = \begin{cases} k^2 + 1 & \text{falls } k = l \\ kl & \text{falls } k \neq l\,. \end{cases}$$

Bitte wenden!

6. Online-Abgabe

1. Welche der folgenden Permutationen haben Signum $+1$?

(a) $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

2. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ heisst *schiefsymmetrisch*, falls $A^T = -A$ gilt. Welche der folgenden Aussage ist wahr?

(a) Jede schiefsymmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ hat Determinante null.

(b) Jede schiefsymmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ mit n gerade hat Determinante null.

(c) Jede schiefsymmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ mit n ungerade hat Determinante null.

(d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine schiefsymmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R})$ mit $\det(A) \neq 0$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 10. März 2014 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.