Serie 5

1. Es sei $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine reelle 2×2-Matrix. Finde Bedingungen an a, b, c, d, so dass die Matrix D

a) 2 verschiedene,

b) genau einen oder

c) keinen reellen Eigenwert hat.

2. Berechne das charakteristische Polynom der folgenden Matrizen und überprüfe, ob die Matrizen diagonalisierbar sind.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. **a)** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, welcher ein Element $a \in \mathbb{K}$ mit $a^3 = 1$ und $a \neq 1$ enthält. Zeige, dass die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

ähnlich sind.

b) Zeige, dass die Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ nicht ähnlich sind in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$. Sind sie ähnlich in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$?

4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

a) Zeige explizit, dass $P_A(A) = 0$ gilt.

b) Berechne A^{10} mit Hilfe von Polynomdivision und Teilaufgabe **a)**.

5. Eine Matrix $N \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{C})$ heisst ***nilpotent***, falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $N^k = 0$ ist. Zeige, dass eine Matrix $N \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{C})$ genau dann nilpotent ist, wenn 0 der einzige Eigenwert von N ist (über $\mathbb{C}$).

6. Online-Abgabe

1. Ein ausgefülltes Sudokugitter gibt eine 9×9 Matrix S mit Einträgen in $\{1, 2, \ldots, 9\} \subseteq \mathbb{Q}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) 45 ist ein Eigenwert von S.

(b) $(1, \ldots, 9)^{\mathrm{T}}$ ist ein Eigenvektor.

(c) Die Determinante von S ist positiv.

(d) Die Determinante von S ist durch 9 teilbar.

(e) Die Determinante von S ist durch 5 teilbar.

Siehe nächstes Blatt!

2. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $(1,2,0)^{\mathrm{T}}$ ist kein Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

(b) Seien $A, P \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{K})$, mit $P^{-1}AP$ diagonal. Dann sind die Spalten von P Eigenvektoren von A.

(c) $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{K})$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn die Summe der Dimensionen der Eigenräume gleich n ist.

(d) $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{K})$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn die Summe der algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A gleich n ist.

(e) Eine nilpotente Matrix ist nur dann diagonalisierbar wenn sie 0 ist.

3. Betrachte die reelle Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Der Eigenwert 1 hat algebraische Vielfachheit 2.

(b) Der Eigenwert 1 hat geometrische Vielfachheit 2 (unabhängig von p, q, r).

(c) Der Eigenwert 2 hat algebraische Vielfachheit 1.

(d) Der Eigenwert 2 hat geometrische Vielfachheit 1.

(e) Für alle p, q, r ist B diagonalisierbar.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 24. März 2014 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.