Serie 7

1. Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & -8 & 12 \\ 6 & 4 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Bestimme die Jordan-Normalformen von A und von B sowie die zugehörigen Jordan-Basen von $\mathbb{R}^5$.

2. Zeige, dass die folgenden Abbildungen $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrischen Bilinearformen sind und untersuche ob Skalarprodukte vorliegen.

a) Sei $V = \mathrm{Mat}_{nm}(\mathbb{R})$ und $\sigma(A, B) = \mathrm{Tr}(A^T B)$.

b) Sei V der Vektorraum der konvergenten Folgen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und

$$\sigma\left((a_n)_n, (b_n)_n\right) = \lim_{n\to\infty}(a_n b_n).$$

c) Sei V der Vektorraum aller beschränkten reellen Zahlenfolgen, das heisst

$$V := \left\{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_{>0}} \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ und } \exists c \in \mathbb{R}\ \forall i : |x_i| < c\right\},$$

und

$$\sigma(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{n^2}.$$

Addition und Skalarmultiplikation auf V sind jeweils in der naheliegenden Weise definiert.

3. Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit dem Skalarprodukt

$$\big\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \big\rangle = x_1 y_1 - (x_1 y_2 + y_1 x_2) + 2 x_2 y_2.$$

Ferner sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 2x_2, x_1 + x_2)$.

a) Bestimme die Matrix A, so dass $\langle x, y\rangle = x^T A y$.

Bitte wenden!

b) Zeige, dass F selbstadjungiert ist.

c) Bestimme eine orthonormierte Basis von $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bestehend aus Eigenvektoren von F.

4. **a)** Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf einem reellen Vektorraum V. Zeige, dass die Norm genau dann von einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induziert wird (d.h. $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$), wenn für alle $x, y \in V$ die Parallelogrammidentität gilt:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 .$$

b) Sei $n \geq 2$. Zeige, dass die die Norm $\|x\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ nicht von einem Skalarprodukt induziert wird.

5. **a)** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Raum. Zeige die Polarisationsformel:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right).$$

b) Sei $f : V \to V$ linear. Zeige

$$f \text{ ist unitär} \iff \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle \quad \forall v, w \in V.$$

Siehe nächstes Blatt!

6. Online-Abgabe

1. Wir betrachten den unitären Vektorraum $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{C})$ mit Skalarprodukt $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^*)$. Dann bilden folgende Matrizen eine Orthonormalbasis:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

(a) Wahr.

(b) Falsch.

2. Welche der folgenden Matrizen sind hermitesch?

(a) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{i}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}i & -2\\ 2 & i\end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$

Bitte wenden!

3. Welche der folgenden Matrizen sind unitär?

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} i & -2 \\ 2 & i \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

4. Seien A und B folgende Matrizen mit $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Kreuze die richtigen Aussagen an.

(a) Der Eigenwert λ zu A hat algebraische Vielfachheit 4.

(b) Der Eigenwert λ zu A hat geometrische Vielfachheit 2.

(c) Der Eigenwert λ zu B hat geometrische Vielfachheit 3.

(d) Der Eigenwert λ zu B hat geometrische Vielfachheit 2.

(e) Die Jordan Normalform einer 4×4 Matrix mit einem einzigen Eigenwert ist, bis auf die Ordnung der Blöcke, durch die algebraische und geometrische Vielfachheit dieses Eigenwertes bestimmt.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 7. April 2014 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.