Serie 9

1. Sei V ein unitärer, endlichdimensionaler Vektorraum. Ein Endomorphismus F heisst *normal*, falls $F \circ F^{\mathrm{ad}} = F^{\mathrm{ad}} \circ F$ gilt.

a) Zeige, dass sowohl unitäre als auch selbstadjungierte Endomorphismen normal sind.

b) Zeige, dass normale Endomorphismen diagonalisierbar sind.

2. Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2. Sei

$$F : V \to V, \quad p(t) \mapsto (t+1)p'(t)$$

und

$$\langle p, q \rangle := p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0).$$

a) Zeige, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

b) Bestimme die zu F adjungierte Abbildung bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

c) Sei $\ell \in V^*$ gegeben durch $\ell(p) = \int_0^1 p(t)dt$. Finde ein $v \in V$, so dass $\ell(p) = \langle p, v \rangle$.

3. Welche der drei folgenden reellen symmetrischen Matrizen sind positiv definit?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Verwende das Hauptminorenkriterium.

4. Sei

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

eine reelle, symmetrische Matrix. Führe für G eine Hauptachsentransformation durch, d. h. bestimme eine Matrix $T \in \mathrm{SO}(4)$ und eine Diagonalmatrix D, sodass $D = T^{-1}GT$.

Hinweis: Alle Eigenwerte von G sind ganzzahlig. Bei der Faktorisierung des charakteristischen Polynoms von G hilft die Tatsache, dass das Produkt der Nullstellen den konstanten Term ergibt.

5. Bestimme zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{44}(\mathbb{R}).$$

eine kongruente Matrix in Normalform und gib die Transformationsmatrix an.

6. Sei A eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$.

a) Zeige, dass

$$\lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \quad \text{und} \quad \lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

b) Zeige, dass

$$\lambda_r = \min_{W \subseteq \mathbb{R}^n,\, \dim W = r} \left\{ \max_{x \in W \setminus \{0\}} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \right\}, \qquad r = 1, \ldots, n.$$

Siehe nächstes Blatt!

7. Online-Abgabe

1. Sei A eine normale Matrix, $p \in \mathbb{C}[t]$ ein Polynom. Welche Aussagen sind allgemein korrekt?

(a) $p(A)^\star = p\left(A^\star\right)$.

(b) $A^i (A^\star)^j = (A^\star)^j A^i$ für $i, j \in \mathbb{N}$.

(c) $p(A)$ ist normal.

(d) Jeder Eigenwert λ von A ist auch Eigenwert von $p(A)$.

(e) Jeder Eigenvektor v von A ist auch Eigenvektor von $p(A)$.

2. Seien U, V unitäre $n \times n$ Matrizen, $\lambda = e^{2\pi i\vartheta}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Welche Aussagen sind allgemein korrekt?

(a) $U + V$ ist unitär.

(b) λU ist unitär.

(c) U^{-1} ist unitär.

(d) UV ist unitär.

(e) $U(n)$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{C})$.

3. Seien A, B positiv definite Matrizen. Welche Aussagen sind im Allgemeinen korrekt?

(a) $A + B$ ist positiv definit.

(b) $A - B$ ist positiv definit.

(c) λA ist positiv definit, für $\mathrm{Re}\lambda > 0$.

(d) λA ist positiv definit, für $0 < \lambda \in \mathbb{R}$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 28. April 2014 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.