Endsemesterprüfung

Numerische Mathematik I

FS 2014

Prof. R. Hiptmair

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Datum	16.5.2014	

1	2	3	Total
(6)	(6)	(4)	(16)

- **Nur Stifte und Legi auf dem Tisch!**
- Mobiltelefone, Tablets, etc. **ausgeschaltet** in der Tasche
- Aufgabenblätter sind in den braunen Kuverts.
  Diese bitte mit Ihrem Namen beschriften.
- **Braune Kuverts dürfen erst auf Anweisung geöffnet werden!**
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine.
- Prüfungsdauer: 20 Minuten.
- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- **Schreiben Sie Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder.**
- **Nach Prüfungsende die ausgefüllten Aufgabenblätter bitte in das mit Ihrem Namen beschriftete braune Kuvert stecken.**

Viel Erfolg!

Endsemesterprüfung

Numerische Mathematik I

D-MATH

FS 2014

Prof. R. Hiptmair

Die Lösungswege müssen, nachvollziehbar dargestellt sein.

Problem 1 Absolute Kondition der Polynominterpolation [6 points]

(1a) [2 points] Gegeben seien ein beschränktes abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und die Knoten $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Was ist die Lebesgue-Konstante zur Knotenmenge $\{x_k\}_{k=0}^n$?

(1b) [4 points] Sei V der Vektorraum der stückweise linearen Funktionen bezüglich Zerlegung $[a, b) = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k)$ und sei $I_{\mathcal{N}} : C^0([a, b]) \to V$ der Interpolationsoperator auf den Vektorraum V zu der Kontenmenge $\{x_k\}_{k=0}^n$. Berechnen Sie die Operatornorm

$$\|I_{\mathcal{N}}\|_\infty := \sup_{f \in C^0([a,b])} \frac{\|I_{\mathcal{N}}(f)\|_{\infty,[a,b]}}{\|f\|_{\infty,[a,b]}}.$$

Problem 2 Trapezregel für nur stückweise glatte Funktion [6 points]

Es bezeichne $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Familie der äquistanten zusammengesetzten Trapezregeln mit Knoten $a =: \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n := b$ und $h := |\xi_k - \xi_{k-1}| = \frac{b-a}{n}$, $k = 1, \ldots, n$.

(2a) [1 points] Was ist die Lokale Ordnung der einfachen Trapezregel $Q^T_{[a,b]} f := \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b))$ auf dem Intervall $[a, b]$?

(2b) [1 points] Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Geben Sie eine (möglichst scharfe) asymptotische Abschätzung für den Quadraturfehler

$$E_n f := \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - Q_n f \right|$$

für $n \to \infty$.

(2c) [4 points] Von einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist bekannt, dass sie beschränkt ist und es Punkte $a \leq z_0 < z_1 < \cdots < z_M < b$ so gibt, dass $f_{|(z_{j-1}, z_j)}$, $j = 1, \ldots, M$, jeweils zu einer C^2-Funktion auf $[z_{j-1}, z_j]$ fortgesetzt werden kann. Geben sie unter diesen Annahmen eine möglichst scharfe asymptotische Abschätzung für den Quadraturfehler

$$E_n f := \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - Q_n f \right|$$

für $n \to \infty$.

Problem 3 Fixpunktiteration [4 points]

Die Funktion $\Phi \in C^1([a,b])$, $a < b$, besitze einen Fixpunkt $x^* \in [a,b]$ und erfülle $|\Phi'(x)| \neq 1$ für jedes $x \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass mindestens eine der beiden Fixpunkt-Iterationen

(i) $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$,

(ii) $y^{(k+1)} = \Phi^{-1}(y^{(k)})$,

für jeden beliebigen Startwert $x^{(0)}$ konvergiert.