Mittsemesterprüfung

Numerische Mathematik I

FS 2014

Prof. R. Hiptmair

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Datum	1.4.2014	

1	2	3	Total
(8)	(8)	(9)	(25)

- **Nur Stifte und Legi auf dem Tisch!**
- Mobiltelefone, Tablets, etc. **ausgeschaltet** in der Tasche
- Aufgabenblätter sind in den braunen Kuverts.
  Diese bitte mit Ihrem Namen beschriften.
- **Braune Kuverts dürfen erst auf Anweisung geöffnet werden!**
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine.
- Prüfungsdauer: 20 Minuten.
- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- **Schreiben Sie Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder.**
- **Nach Prüfungsende die ausgefüllten Aufgabenblätter bitte in das mit Ihrem Namen beschriftete braune Kuvert stecken.**

Viel Erfolg!

Mittsemesterprüfung

Numerische Mathematik I

D-MATH

FS 2014

Prof. R. Hiptmair

Die Lösungswege müssen, **nachvollziehbar dargestellt sein.**

Problem 1 Fehlerabschätzung für Polynominterpolation [8 points]

Es sei für $a < b$ die Abbildung $P^{(n)}_{[a,b]} : C^0([a,b]) \to \mathbb{P}_n$, $n \geq 1$, der Polynominterpolationsoperator zu äquidistanten Knoten $x_j = a + j(b-a)/n$, $j = 0, \ldots, n$. In der Vorlesung wurde folgende Fehlerschranke für die Maximumnorm des Interpolationsfehlers hergeleitet

$$\left\| f - P^{(n)}_{[a,b]} f \right\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{\infty,[a,b]} \|\omega_n\|_{\infty,[a,b]} , \quad \omega_n(t) := \prod_{j=0}^{n} (t - x_j) . \tag{1.1}$$

(1a) [4 points] Leiten Sie aus (1.1) eine möglichst scharfe Schranke (in Abhängigkeit von n) für $\left\| f - P^{(n)}_{[1,2]} f \right\|_{\infty,[1,2]}$ und $f = \log$ (natürlicher Logarithmus) ab.

HINWEIS: Sie können die Stirlingsche Formel verwenden:

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n} \leq n! \leq e\, n^{n+1/2} e^{-n} \quad \text{für alle} \quad n \geq 1 . \tag{1.2}$$

(1b) [4 points] Zeigen Sie, dass die Schranke aus (1.1) *skalierungsinvariant* ist, d.h., sie ändert sich nicht, wenn $[a,b]$ durch $[0,1]$, die Knotenmenge $\mathcal{N}$ durch $T^{-1}(\mathcal{N})$, und f durch $f \circ T$ ersetzt wird, wobei T die affine Transformation $T(\xi) := a + (b-a)\xi$ bezeichne, $\xi \in [0,1]$.

Problem 2 Lineares Gleichungssystem [8 points]

Für reguläres $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u})(\mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1})}{1 + \mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \ , \tag{2.1}$$

wenn $1 + \mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \neq 0$.

(2a) **[2 points]** Zeigen Sie, dass $\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top$ singulär ist, wenn $\mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} = -1$.

HINWEIS: Bestimmen Sie einen nichttrivialen Vektor im Nullraum von $\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top$.

(2b) **[4 points]** Ihnen wird der MATLAB-Code aus Listing 2.1 vorgelegt und es wird Ihnen gesagt, dass er auf der Formel (2.1) basiert. Ferner, dass die MATLAB-Funktion `smvslv(d,b)` zwei Spaltenvektoren als Eingaben erwartet und ein lineare Gleichungssystem mit rechter Seite `b` löst.

Geben Sie die Koeffizientenmatrix dieses linearen Gleichungssystems an.

HINWEIS: `c=b./d` $\Longleftrightarrow$ `c(i)=b(i)/d(i)` for `i=1:length(d)`

Listing 2.1: Lösungsalgorithmus für spezielles lineares Gleichungsystem auf der Grundlage von (2.1)

```
function x = smvslv(d,b)
n = length(d);
if (length(b) ~= n), error('size mismatch'); end
w = 1./d;
alpha = 1 + sum(w);
if (abs(alpha) < eps*sum(abs(d)))
  warning('System close to singular');
end
x = b./d - w*(w'*b)/alpha;
```

(2c) **[2 points]** Was ist der asymptotische Rechenaufwand der Funktion `smvslv` aus Listing 2.1 bezüglich der Vektorlänge $n \to \infty$?

Problem 3 Auslöschung [9 points]

Betrachten Sie die folgende MATLAB-Funktion

Listing 3.1: MATLAB-Implementierung der rationalen Funktion y

```
function y=ratfn(x)
if ((x<=-1) || (x>=1))
   error ('out of range');
end
y=1/(1+x)-1/(1-x);
```

(3a) [2 points] Was versteht man unter dem Phänomen der “Auslöschung” im Kontext numerischer Berechnungen?

(3b) [4 points] Sei $\widetilde{y}(x)$ das Ergebnis von `ratfn` berechnet in MATLAB mit IEEE Gleitpunktarithmetik für ein zulässigen Argument x aus der entsprechenden Menge der Gleitpunktzahlen.

Sei $\delta(x)$ der relative Fehler von $\widetilde{y}$, also $\widetilde{y}(x) = y(x)(1+\delta(x))$. Geben Sie für $\delta(x)$ eine hinreichend scharfe Schranke an, in Abhängigkeit von der Rundungseinheit (Maschinengenauigkeit) $u \approx 10^{-16}$.

HINWEIS: Verwenden Sie folgende Abschätzung: Wenn $0 \leq u < 1$, $n < \frac{1}{u}$, und $|\delta_i| \leq u$, dann gilt

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_i)^{\pm 1} = 1 + \theta_n \quad \text{wobei} \quad |\theta_n| \leq \frac{nu}{1-nu} = \gamma_n(u) \ .$$

(3c) **[3 points]** In Listing 3.2 sind drei verschiedene bei rundungsfehlerfreier Rechnung äquivalente MATLAB-Implementierungen der rationalen Funktion `ratfn` aus Listing 3.1 angegeben.

Figure 3.1 stellt die sich unter dem Einfluss von Rundungsfehlern für `f1`, `f2` und `f3` ergebenden relativen Fehler bei der Rechnung in IEEE-Gleitpunktarithmetik doppelter Genauigkeit für $x \in \{3^{-k}\}_{k=1,\ldots,30} \bigcup \{1 - 3^{-k}\}_{k=1,\ldots,30}$ dar.

Listing 3.2: Verschiedene algebraisch äquivalente Implementierungen von `ratfn`

```
f1 = @(x) ((1/(1.0+x))-(1/(1.0-x)));
f2 = @(x) (-2*x/(1.0-x^2));
f3 = @(x) (-2*x/((1.0-x)*(1.0+x)));
```

Welcher Fehlergraph entspricht welcher Implemenentierung? Begründen Sie ihre Antwort kurz.

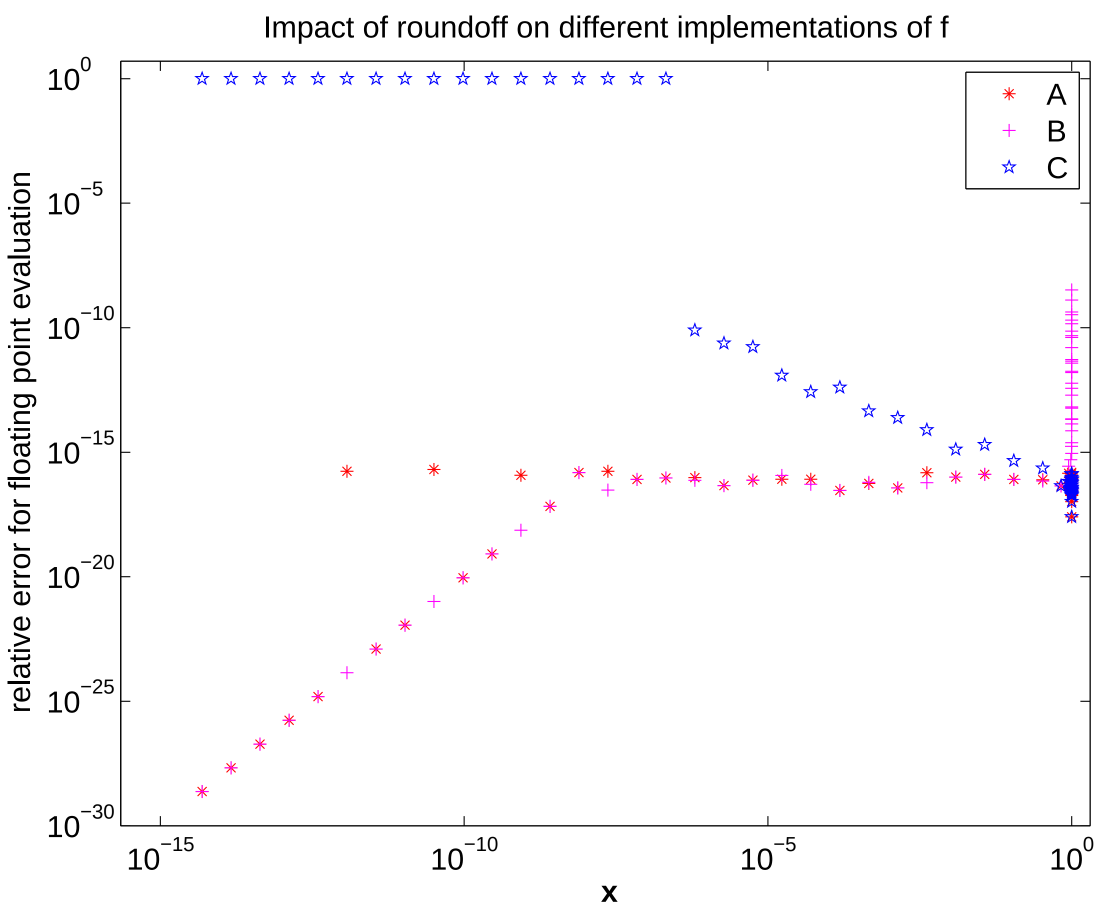

Abbildung 3.1: Relativer Fehler für verschiedene Implementierungen `f1`, `f2`, `f3` der rationalen Funktion y