Endsemesterprüfung

Numerische Mathematik I

FS 2014

Prof. R. Hiptmair

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Datum	16.5.2014	

1	2	3	Total
(6)	(6)	(4)	(16)

- **Nur Stifte und Legi auf dem Tisch!**
- Mobiltelefone, Tablets, etc. **ausgeschaltet** in der Tasche
- Aufgabenblätter sind in den braunen Kuverts.
  Diese bitte mit Ihrem Namen beschriften.
- **Braune Kuverts dürfen erst auf Anweisung geöffnet werden!**
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine.
- Prüfungsdauer: 20 Minuten.
- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- **Schreiben Sie Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder.**
- **Nach Prüfungsende die ausgefüllten Aufgabenblätter bitte in das mit Ihrem Namen beschriftete braune Kuvert stecken.**

Viel Erfolg!

Endsemesterprüfung

Numerische Mathematik I

D-MATH

FS 2014

Prof. R. Hiptmair

Die Lösungswege müssen,
nachvollziehbar dargestellt sein.

Problem 1 Absolute Kondition der Polynominterpolation [6 points]

(1a) [2 points] Gegeben seien ein beschränktes abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und die Knoten $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Was ist die Lebesgue-Konstante zur Knotenmenge $\{x_k\}_{k=0}^n$?

Solution: The Lebesgue constant is the operator norm of the polynomial interpolation operator $I_{\mathcal{N}}$ with respect to the maximum norm, i.e. $\|I_{\mathcal{N}}\|_\infty$.

Alternative: The Lebesgue constant of $\{x_k\}_{k=0}^n$ is defined as

$$\Lambda_n = \Lambda_n(\{x_0, \ldots, x_n\}) := \left\| \sum_{k=0}^{n} |\ell_k(t)| \right\|_{\infty,[a,b]}$$

where $\ell_k(t) \in \mathbb{P}_n$, $k = 0, \ldots, n$, are the Lagrange polynomials associated with the nodes $\{x_k\}_{k=0}^n$. It measures the absolute condition of the polynomial interpolation at the nodes $\{x_k\}_{k=0}^n$.

(1b) [4 points] Sei V der Vektorraum der stückweise linearen Funktionen bezüglich Zerlegung $[a, b) = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k)$ und sei $I_{\mathcal{N}} : C^0([a, b]) \to V$ der Interpolationsoperator auf den Vektorraum V zu der Kontenmenge $\{x_k\}_{k=0}^n$. Berechnen Sie die Operatornorm

$$\|I_{\mathcal{N}}\|_\infty := \sup_{f \in C^0([a,b])} \frac{\|I_{\mathcal{N}}(f)\|_{\infty,[a,b]}}{\|f\|_{\infty,[a,b]}}.$$

Solution: It holds $\|I_{\mathcal{N}}\|_\infty = 1$. Indeed on each interval $[x_{k-1}, x_k]$ for $k = 1, \ldots, n$,

$$\|I_{\mathcal{N}}(f)\|_{\infty,[x_{k-1},x_k]} = \max_{x \in [x_{k-1},x_k]} |I_{\mathcal{N}} f| \leq \max\{|f(x_{k-1})|, |f(x_k)|\}$$

and clearly $\|f\|_{\infty,[x_{k-1},x_k]} \geq \max\{|f(x_{k-1})|, |f(x_k)|\}$ which gives the upper bound $\|I_{\mathcal{N}}\|_\infty \leq 1$. By choosing $f \in C^0([a, b])$ piecewise linear, the interpolation is exact and therefore $\|I_{\mathcal{N}}\|_\infty = 1$.

Alternative: One can show that

$$\sup_{f \in C^0([a,b])} \frac{\|I_{\mathcal{N}}(f)\|_{\infty,[a,b]}}{\|f\|_{\infty,[a,b]}} = \Lambda_n(\{x_0, \ldots, x_n\}) := \left\| \sum_{k=0}^{n} |\ell_k(t)| \right\|_{\infty,[a,b]} \tag{1.1}$$

where Λ_n is the Lebesgue constant of the nodes $\{x_k\}_{k=0}^n$. The Lagrange polynomials ℓ_k (“tent functions”) are non-negative and sum to 1, thus $\|I_{\mathcal{N}}\|_\infty = 1$.

Proof of (1.1): Let $y_k = f(x_k)$ for $k = 0, \ldots, n$. First we prove the upper bound, namely

$$\|I_{\mathcal{N}}(f)\|_{\infty,[a,b]} = \sup_{t \in [a,b]} \left| \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(t) \right| \leq \sup_{t \in [a,b]} \sum_{k=0}^{n} |y_k||\ell_k(t)| \leq \|f\|_{\infty,[a,b]} \left\| \sum_{k=0}^{n} |\ell_k(t)| \right\|_{\infty,[a,b]}.$$

Moreover by taking $t^\star := \operatorname{argmax}_{t \in [a,b]} \sum_{k=0}^n |\ell_k(t)|$ and $y_k = \operatorname{sgn}(\ell_k(t^\star))$ for $k = 0, \ldots, n$, equality (1.1) follows.

Problem 2 Trapezregel für nur stückweise glatte Funktion [6 points]

Es bezeichne $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Familie der äquistanten zusammengesetzten Trapezregeln mit Knoten $a =: \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n := b$ und $h := |\xi_k - \xi_{k-1}| = \frac{b-a}{n}$, $k = 1, \ldots, n$.

(2a) [1 points] Was ist die Lokale Ordnung der einfachen Trapezregel $Q^T_{[a,b]}f := \frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b))$ auf dem Intervall $[a,b]$?

Solution: The local trapezoidal rule is of order 2, i.e. piecewise linear functions on $[a,b]$ are integrated exactly. We know this from the course.

(2b) [1 points] Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Geben Sie eine (möglichst scharfe) asymptotische Abschätzung für den Quadraturfehler

$$E_n f := \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - Q_n f \right|$$

für $n \to \infty$.

Solution: From the course we know that local order 2 translates into convergence $O(h^2) = O(n^{-2})$.

(*Not necessary*) Derivation of the upper bound for the quadrature error: The local trapezoidal rule is of order 2 in each sub-interval $[\xi_{j-1}, \xi_j]$, $j = 1, \ldots, n$ and its quadrature error reads

$$\begin{aligned}\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} f(x)\,\mathrm{d}x - Q_{[\xi_{j-1},\xi_j]}f &= \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\xi_j - \xi_{j-1}}{2}(f(\xi_{j-1}) + f(\xi_j)) = \\ &= -\frac{(\xi_j - \xi_{j-1})^3}{12} f''(x_j), \qquad x_j \in [\xi_{j-1}, \xi_j] \text{ and } f \in C^2(\xi_{j-1}, \xi_j).\end{aligned}$$

Using the expression of the quadrature error in each sub-interval, one has

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - Q_h f \right| \le \sum_{j=1}^n \left| \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} f(x)\,\mathrm{d}x - Q_{[\xi_{j-1},\xi_j]}f \right| = \sum_{j=1}^n \frac{h^3}{12}|f''(x_j)| \le \frac{h^2}{12}(b-a)\|f''\|_{\infty,[a,b]}.$$

(2c) [4 points] Von einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist bekannt, dass sie beschränkt ist und es Punkte $a \le z_0 < z_1 < \cdots < z_M < b$ so gibt, dass $f_{|(z_{j-1},z_j)}$, $j = 1, \ldots, M$, jeweils zu einer C^2-Funktion auf $[z_{j-1}, z_j]$ fortgesetzt werden kann. Geben sie unter diesen Annahmen eine möglichst scharfe asymptotische Abschätzung für den Quadraturfehler

$$E_n f := \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - Q_n f \right|$$

für $n \to \infty$.

Solution: In *finitely many* intervals $[x_{k-1}, x_k]$, f may have a discontinuity. There are at most $O(n)$ such intervals. There we incur a quadrature error of size $O(h)$, since f is bounded. In the other intervals f is C^2 and the local quadrature error will be $O(h^3)$. We see that the quadrature error at potential discontinuities is dominant and we obtain an asymptotic bound of $O(n^{-1})$ for the total quadrature error.

Problem 3 Fixpunktiteration [4 points]

Die Funktion $\Phi \in C^1([a,b])$, $a < b$, besitze einen Fixpunkt $x^* \in [a,b]$ und erfülle $|\Phi'(x)| \ne 1$ für jedes $x \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass mindestens eine der beiden Fixpunkt-Iterationen

(i) $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$,

(ii) $y^{(k+1)} = \Phi^{-1}(y^{(k)})$,

für jeden beliebigen Startwert $x^{(0)}$ konvergiert.

Solution: We can assume that either $|\Phi'(x)| < 1$ for every $x \in (a,b)$ or there exists $x \in (a,b)$ such that $|\Phi'(x)| > 1$.

First, suppose that $|\Phi'(x)| < 1$ for every $x \in (a,b)$; this means that Φ is a contraction on $[a,b]$. Let $L = \|\Phi'\|_{\infty,[a,b]} < 1$ and $x^{(0)} \in [a,b]$, hence

$$\left|x^{(k+1)} - x^*\right| = \left|\Phi(x^{(k)}) - x^*\right| \leq L\left|x^{(k)} - x^*\right| \leq \ldots \leq L^{k+1}\left|x^{(0)} - x^*\right|,$$

which proves the convergence of $x^{(k)}$ to x^* for $k \to \infty$.

Now, assume that there exists $x \in (a,b)$ such that $|\Phi'(x)| > 1$, then by the mean value theorem for every $x \in (a,b)$, we have $|\Phi'(x)| > 1$. Therefore, by the inverse function theorem, Φ is invertible and the inverse is continuously differentiable, $(\Phi^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\Phi'(x)}$ where $y = \Phi(x)$. Moreover, $|(\Phi^{-1})'(y)| < 1$ for every $y \in [a,b]$ and the same argument as above applies to the iteration (ii). In particular, let $L = \|(\Phi^{-1})'\|_{\infty,[a,b]} < 1$ and $y^{(0)} \in [a,b]$,

$$\left|y^{(k+1)} - x^*\right| = \left|\Phi^{-1}(y^{(k)}) - x^*\right| \leq L\left|y^{(k)} - x^*\right| \leq \ldots \leq L^{k+1}\left|y^{(0)} - x^*\right|,$$

which proves the convergence of $y^{(k)}$ to x^* for $k \to \infty$.