Satz von Gauss

In diesem Abschnitt möchten wir den Satz von Gauss oder auch Divergenzsatz für einen Spezialfall beweisen.

Satz von Gauss. *Es sei das Vektorfeld* $\mathbf{F}(x, y, z)$ *differenzierbar in* D*, mit* $S = \partial D$ *eine orientierbare Fläche. Dann gilt:*

$$\iiint_D \mathrm{div}\mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

wobei $\mathbf{n}$ *der nach aussen zeigende Normalvektor ist.*
Für den Beweis brauchen wir folgende Aussage über die partielle Integration im Raum:

Satz (Partielle Integration im Raum). Die Funktion $h(x, y, z)$ habe in D eine stetige Ableitung $\partial_z h(x, y, z)$. Dann gilt

$$\iiint_D \partial_z h(x, y, z)\, dV = \iint_{\partial G} h(x, y, z) \cdot n_3\, dS,$$

wobei (n_1, n_2, n_3) die Einheitsnormale nach aussen ist.

Beweis: Für den Beweis betrachtet man entsprechend zuerst den einfachsten Fall, dass das Gebiet D begrenzt ist von den zwei Flächen $z = z_1(x, y)$ und $z = z_2(x, y)$ – siehe Abbildung 1 – hier heisst das Gebiet G statt D:

Die Einheitsnormale zu einer Fläche $z = z(x, y)$ ist gegeben durch

$$\mathbf{n} = \pm \frac{(\partial_x z(x, y), \partial_y z(x, y), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla z(x, y)|^2}},$$

wobei das Vorzeichen angibt, ob die Normale nach aussen oder nach innen zeigt. Andererseits haben wir gefunden, dass das Oberflächenlement im vorliegenden Fall gegeben ist durch

$$dS = \sqrt{1 + |\nabla z(x, y)|^2}\, dxdy.$$

Es gilt demnach $n_3 \cdot dS = dxdy$ auf $z = z_2(x, y)$ und $n_3 \cdot dS = -dxdy$ auf $z = z_1(x, y)$. Wir schreiben die Integrale wieder aus:

$$\iiint_D \partial_z h(x, y, z)\, dV = \iint_{\widetilde{D}} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \partial_z h(x, y, z)\, dzdxdy,$$

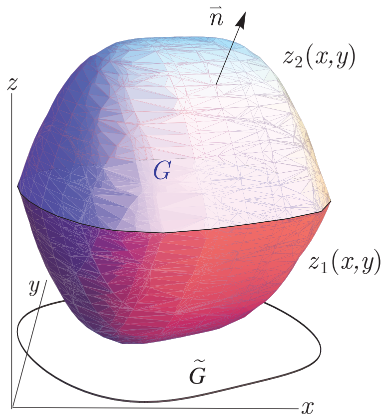

Abbildung 1: Ein Gebiet im Raum begrenzt von zwei Flächen

wobei $\widetilde{D}$ (in der Abbildung $\widetilde{G}$) die Projektion von G (*Schatten*) auf die (x, y)-Ebene ist. Nach einem Integrationsschritt erhalten wir

$$\iiint_D \partial_z h(x, y, z)\, dV = \iint_{\widetilde{D}} (h(x, y, z_2(x, y)) - h(x, y, z_1(x, y)))\, dxdy.$$

Nun schreiben wir das andere Integral aus, und beachten das Vorzeichen der Normalen oben und unten. Das liefert aber direkt

$$\iint_S h(x, y, z) \cdot n_3\, dS = \iint_{\widetilde{D}} (h(x, y, z_2(x, y)) - h(x, y, z_1(x, y)))\, dxdy,$$

also das gleiche Ergebnis. ■

Bemerkungen:

(a) Für kompliziertere Gebiete muss man eine Zerlegung in einfache Gebiete vornehmen; für die einfachen Teilgebiete kann man den obigen Satz anwenden und durch Zusammensetzung bekommt man dann die allgemein gültige Version.

(b) Wie schon bei zwei Variablen kann man die Rollen der Variablen vertauschen und beschreibt dann die Oberfläche von D als $y = y(x, z)$

oder $x = x(y,z)$. Genau die gleichen Überlegungen wie oben geben dann die analogen Versionen:

$$\iiint\limits_D \partial_x f(x,y,z)\, dV = \iint\limits_S f(x,y,z) \cdot n_1\, dS,$$

$$\iiint\limits_D \partial_y g(x,y,z)\, dV = \iint\limits_S g(x,y,z) \cdot n_2\, dS.$$

Wählt man schliesslich $f(x,y,z) = v_1(x,y,z)$, $g(x,y,z) = v_2(x,y,z)$ und $h(x,y,z) = v_3(x,y,z)$ und addiert die Integrale, bekommt man die dreidimensionale Version des Satzes von Gauss.

$\blacksquare$