Wir haben das skalare Linienintegral folgendermasse definiert

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(r(t))|r'(t)|\, dt \tag{1}$$

Wenn wir nun die Tangentialkomponente eines Vektorfeldes $\mathbf{F}$ entlang einer Kurve C aufsummieren möchten, so brauchen wir die Länge des Vektors $\mathbf{F}_{\tan}(r(t))$ – siehe Abbildung :

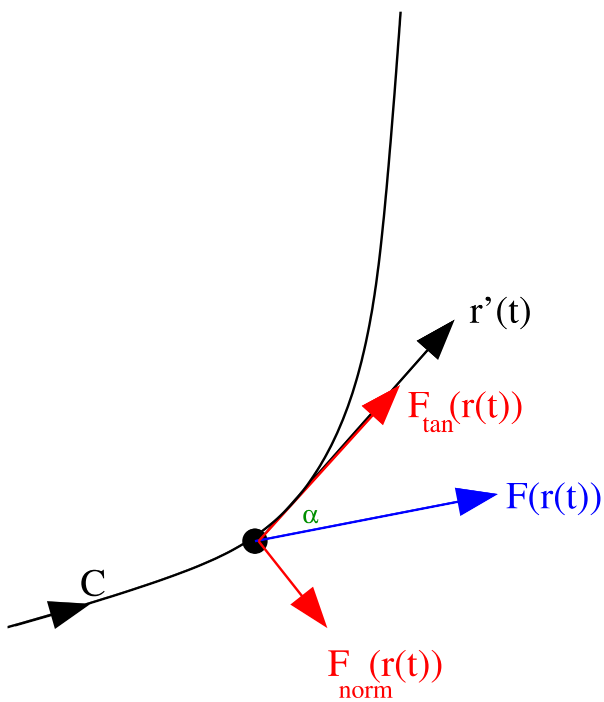

Abbildung 1: Tangential- und Normalkomponente eines Vektorfeldes entlang einer Kurve

Beachte, dass

$$\frac{|\mathbf{F}_{\tan}|}{|\mathbf{F}|} = \cos\alpha = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{F}||\mathbf{r}'(t)|}$$

und somit

$$|\mathbf{F}_{\tan}| = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Also, wir müssen die skalarwertige Tangentialkomponente des Vektorfeldes entlang der Kurve aufsummieren, wir führen dafür folgende Notation ein (angelehnt an Gleichung (1))

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C |\mathbf{F}_{\tan}|\,ds\\ &= \int_a^b \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt\\ &= \int_a^b \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt\end{aligned}$$

Für die Normalkomponente des Vektorfeldes gilt analog

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{n} &= \int_C |\mathbf{F}_{\text{norm}}|\,ds \\ &= \int_a^b \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}(t)}{|\mathbf{n}(t)|}\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}(t)\,dt\end{aligned}$$

wobei zu bemerken ist, dass $|\mathbf{n}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$ weil man den Normalvektor aus der Parametrisierung erhält indem man den Tangentialvektor um $\frac{\pi}{2}$ im Uhrzeigersinn dreht d.h.

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{r}'(t)$$