

Satz von Stokes und der Beweis für einen Spezialfall

Satz von Stokes: Sei S eine glatte orientierte Fläche in \mathbb{R}^3 mit glattem geschlossenem Rand $C = \partial S$, dessen Orientierung konsistent ist mit der von S . Sei $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ein Vektorfeld, dessen Komponenten stetige erste partielle Ableitungen haben auf S . So gilt

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

wobei \mathbf{n} eine Einheitsnormale auf S ist, bestimmt durch die Orientierung von S .

Wir werden diesen Satz beweisen für den Spezialfall, wo S gegeben ist als Funktionsgraph. Wir brauchen dabei die Zirkulationsvariante des Satzes von Green:

Satz von Green – Zirkulation: Sei C eine einfache geschlossene glatte, im Gegenuhrzeigersinn orientierte Kurve, welche ein zusammenhängendes und einfach-zusammenhängendes Gebiet R in der Ebene begrenzt. Sei $\mathbf{G} = (G_1, G_2)$ ein Vektorfeld mit stetigen ersten partiellen Ableitungen auf R . So gilt

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C (G_1(r(t)) \cdot x'(t) + G_2(r(t)) \cdot y'(t)) \, dt \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \, dA. \end{aligned}$$

Beweis Spezialfall Stokes: Sei S der Graph der Funktion $z = f(x, y)$ definiert über einem Gebiet in der xy -Ebene. Sei $C = \partial S$ der Rand von S orientiert im Gegenuhrzeigersinn und seien R und C' die Projektionen von S und C auf der xy -Ebene.

Sei C parametrisiert durch $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ und somit gilt – mit Hilfe der Kettenregel

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t))$$

und somit lautet das Linienintegral im Satz von Stokes

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\
 &= \oint_C F_1(r(t)) \cdot x'(t) + F_2(r(t)) \cdot y'(t) \\
 &\quad + F_3(r(t)) \cdot (f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)) dt \\
 &= \oint_C (F_1(r(t)) + F_3(r(t)) \cdot f_x(x(t), y(t))) \cdot x'(t) \\
 &\quad + (F_2(r(t)) + F_3(r(t)) \cdot f_y(x(t), y(t))) \cdot y'(t) dt.
 \end{aligned}$$

Dieses letzte Integral passt genau ins Setting des Satzes von Green, wobei

$$G_1(r(t)) = F_1(r(t)) + F_3(r(t)) \cdot f_x(x(t), y(t)),$$

$$G_2(r(t)) = F_2(r(t)) + F_3(r(t)) \cdot f_y(x(t), y(t)).$$

Beachte, dass aus der Kettenregel (und Produktregel) folgt, dass

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot f_y + \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \cdot f_y \right) \cdot f_x + F_3 \cdot f_{xy},$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot f_x + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \cdot f_x \right) \cdot f_y + F_3 \cdot f_{yx}$$

und somit

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = -f_x \cdot \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) - f_y \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + 1 \cdot \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Also gilt nach Anwendung des Satzes von Green

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_R \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dA \\
 &= \iint_R -f_x \cdot \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) - f_y \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \\
 &\quad + 1 \cdot \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA.
 \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die andere Seite der Gleichung im Satz von Stokes, so sehen wir, dass in diesem Spezialfall folgendes gilt:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit ist die folgende Gleichung und damit der Satz von Stokes bewiesen:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

■