Musterlösung 1

1. **a)** Für $y = 2$ ist die rechte Seite der Differentialgleichung gleich null, folglich löst die konstante Funktion $y = 2$ diese Gleichung. Die Berechnung nicht konstanter Lösungen erfordert Separation der Variablen

$$\frac{y'(x)}{y(x)-2} = \frac{1}{x-1}$$

und anschliessende Integration:

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)-2} dx = \int \frac{dx}{x-1}.$$

Mit Hilfe der Substitionsregel erhalten wir

$$\log|y-2| = \log|x-1| + c.$$

Nun lösen wir nach y auf, indem wir die Exponentialfunktion anwenden und erhalten

$$|y-2| = |x-1|e^c \qquad \Longleftarrow \qquad y-2 = \pm e^c(x-1).$$

Mit $C = \pm e^c$ gilt dann

$$y = 2 + C(x-1)\ .$$

Nachrechnen zeigt, dass diese Formel schon für alle $C \in \mathbb{R}$ eine Lösung liefert. Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und bildet daher eine Maximallösung. Für verschiedene Wahlen von C bilden ihre Graphen alle nicht-vertikalen Geraden in $\mathbb{R}^2$ durch den Punkt $(1, 2)$. Diese decken also den Definitionsbereich $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 1\}$ der Differentialgleichung ab. Da deren rechte Seite dort überall lokal Lipschitz-stetig ist, haben wir somit nach dem Eindeutigkeitssatz alle Maximallösungen gefunden.

b) Die rechte Seite der Differentialgleichung ist stets ungleich 0, es gibt daher keine konstanten Lösungen. Es gilt

$$y' = e^{x+y} \ = \ e^x \cdot e^y, \quad e^{-y(x)}y'(x) = e^x,$$

woraus wir

$$\int e^{-y(x)}y'(x)\ dx = \int e^x\ dx$$

erhalten. Mittels Substitutionsregel erhalten wir

$$-e^{-y(x)} = e^x - c\ .$$

Diese Gleichung erfordert wegen $e^a > 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$, dass $c > e^x$ ist und ist dann äquivalent zu

$$y(x) = -\log\left(c - e^x\right)\ .$$

Für $c > 0$ ist der Definitionsbereich nicht leer und gleich $]-\infty, \log(c)[$. Für jeden Anfangswert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gibt es eine Lösung dieser Gestalt, nämlich mit

$$c := e^{x_0} + e^{-y_0}$$

setzen. Also überdecken die Graphen der Lösungen ganz $\mathbb{R}^2$. Da die Funktion $(x, y) \mapsto e^{x+y}$ überall lokal Lipschitz-stetig ist, haben wir nach dem Einddeutigkeitssatz alle Maximallösungen gefunden.

Bitte wenden!

2. Es gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 + y^3}{3xy^2} = \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{3}\,\frac{y}{x}\,.$$

Dies ist eine homogene Differentialgleichung, das heisst y' hängt nur von $\frac{y}{x}$ ab.

Wir setzen $v := \frac{y}{x}$. $\Rightarrow y(x) = v(x) \cdot x \Rightarrow y' = v'x + v$. Dann erhalten wir die folgenden äquivalenten Gleichungen:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{3}\,\frac{y}{x} \\ \iff \qquad v'x + v &= \frac{2}{3}\,v^{-2} + \frac{1}{3}\,v \\ \iff \qquad v'x &= \frac{2}{3}\,(v^{-2} - v)\,. \end{aligned}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung verschwindet nur bei $v = 1$. Die einzige konstante Lösung ist hier also $v = 1$, was in ursprünglichen Variablen zur identischen Lösung $y = x$ führt.

Für nicht konstantes v rechnen wir weiter mit Separation der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{3v'}{v^{-2} - v} &= 2\,\frac{1}{x} \\ \int \frac{3v^2}{1 - v^3}\,dv &= \int 2\,\frac{1}{x}\,dx \\ -\ln|1 - v^3| &= 2\ln|x| + c \\ 1 - v^3 &= Cx^{-2} \qquad (\text{mit } C = \pm e^{-c}) \\ v &= \sqrt[3]{1 - Cx^{-2}} \\ \frac{y}{x} &= \sqrt[3]{1 - Cx^{-2}} \\ y &= x\,\sqrt[3]{1 - Cx^{-2}} \;=\; \sqrt[3]{x^3 - Cx}\,. \end{aligned}$$

Für $C = 0$ gibt diese Formel die Lösung $y = x$ von oben zurück. Wir rechnen nach, dass für jedes $C \in \mathbb{R}$ die Formel

$$y(x) = x\,\sqrt[3]{1 - Cx^{-2}} \;=\; \sqrt[3]{x^3 - Cx}$$

tatsächlich die Differentialgleichung löst:

$$y' = \frac{1}{3y^2}\left(3x^2 - C\right) = \frac{2}{3}\frac{x^2}{y^2} + \frac{x^2 - C}{3y^2} = \frac{2}{3}\frac{x^2}{y^2} + \frac{x^3 - Cx}{3xy^2} = \frac{2}{3}\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{3x}\,.$$

Für verschiedene Wahlen von $C \in \mathbb{R}$ überdecken die Graphen der Lösungen den Definitionsbereich $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0 \vee y \neq 0\}$ der Differentialgleichung. Weiterhin ist deren rechte Seite dort überall lokal Lipschitz-stetig. Somit haben wir nach dem Eindeutigkeitssatz alle Maximallösungen gefunden.

3. Mit dem Ansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

erhalten wir

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir setzen ein in die Differentialgleichung und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1},$$

also

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2 a_{n-1} x^n,$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $a_1 = 0$ und $(n+1)a_{n+1} = 2a_{n-1}$ für alle $n \geq 1$, also $a_n = \frac{2}{n} \cdot a_{n-2}$ für alle $n \geq 2$. Daraus folgt $a_n = 0$ für alle ungeraden n, sowie für $n = 2k$

$$a_{2k} = \frac{2}{2k} \cdot \frac{2}{2k-2} \cdots \frac{2}{2} \cdot a_0 = \frac{a_0}{k!}$$

Aus der Anfangsbedingung folgt $a_0 = y(0) = 1$ und somit

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k} = e^{x^2} \ .$$

Wir überprüfen, dass die Funktion eine Lösung ist:

$$(e^{x^2})' = 2xe^{x^2} \ .$$

Da $(x, y) \mapsto 2xy$ lokal Lipschitz-stetig ist, ist die Lösung die eindeutig Maximallösung des Anfangswertproblems.

4. Wir bemerken, dass k-maliges Ableiten eine lineare Abbildung auf dem Vektorraum der k-mal differenzierbaren Funktionen ist, d.h. für k-mal differenzierbare Funktionen y, y_1 und y_2 und einen Skalar λ gilt

$$\frac{d^k}{dx^k}(\lambda y) = \lambda \frac{d^k}{dx^k} y \ ,$$

und

$$\frac{d^k}{dx^k}(y_1 + y_2) = \frac{d^k}{dx^k} y_1 + \frac{d^k}{dx^k} y_2 \ .$$

a) Die n-mal differenzierbaren Funktionen bilden für sich einen Vektorraum. Wir müssen zeigen, dass die Lösungen der homogenen Gleichung einen linearen Unterraum bilden.

Zunächst ist die Nullfunktion eine Lösung der homogenen Gleichung.

Ist y eine Lösung der homogenen Gleichung, so ist

$$L(\lambda y) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dx^i}(\lambda y) = \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dx^i} y = \lambda L y = 0 \ .$$

Analog zeigen wir für zwei Lösungen y_1 und y_2, dass

$$L(y_1 + y_2) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d}{dx^i}(y_1 + y_2) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dx^i} y_1 + \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dx^i} y_2 = L y_1 + L y_2 \ ,$$

d.h. auch die Summe zweier Lösungen ist wieder eine Lösung der homogenen Gleichung.

Bitte wenden!

b) Wegen der Linearität der Ableitung ist

$$L\left(y_p + y_h\right) = Ly_p + Ly_h = b + 0 = b\ .$$

Nehmen wir umgekehrt an, dass $y_h + y_p$ die Gleichung $L\left(y_h + y_p\right) = b$ löst. Dann ist

$$0 = L\left(y_h + y_p\right) - b = Ly_h + \left(Ly_p - b\right) = Ly_h\ .$$

Also löst y_h die homogene Gleichung.

c) Wieder verwenden wir die Linearität der Ableitung und schreiben

$$L\left(y_1 + \ldots y_r\right) = Ly_1 + \ldots + Ly_r = b_1 + \ldots + b_r\ .$$

5. **a)** Die Lösung der homogenen Gleichung erhalten wir durch die folgende Rechnung:

$$y_h(x) = e^{\int(-x)\,dx} = e^{\frac{-x^2}{2}+c} = Ce^{\frac{-x^2}{2}},$$

mit $C = e^c$. Eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + x\,y = (x+1)\cdot e^x$$

erhalten wir durch Variation der Konstanten

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(\int \frac{(x+1)\cdot e^x}{e^{-\frac{x^2}{2}}}\,dx\right).$$

Wir berechnen das Integral

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)\cdot e^x}{e^{-\frac{x^2}{2}}}\,dx &= \int (x+1)\cdot e^{\frac{x^2}{2}+x}\,dx = \int (x+1)\cdot e^{\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2}}\,dx \\ &= e^{\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2}} + C = e^{\frac{x^2}{2}+x} + C\end{aligned}$$

und erhalten die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(e^{\frac{x^2}{2}+x} + C\right) = e^x + Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

b) Wir lösen zunächst die zugehörige homogene Differentialgleichung $y' + y/x = 0$ durch Separation der Variablen: Umstellen ergibt

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{x},$$

und indem wir beide Seiten integrieren erhalten wir

$$\log|y(x)| = -\log|x| + c$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Durch Anwendung der Exponentialfunktion erhalten wir die allgemeine Lösung $y(x) = \pm e^c/x = C/x$ mit einer Konstanten $C = \pm e^c$. Wir rechnen nach, dass dies eine Lösung ist.

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung bestimmen wir durch Variation der Konstanten.

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\log x}\int \cos x e^{\log x}\,dx \\ &= \frac{1}{x}\int x\cos x\,dx \\ &= \frac{\cos x + C}{x} + \sin x \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

der inhomogenen Gleichung, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Für $C \neq -1$ ist y auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert. Für $C = -1$ können wir y in $x = 0$ stetig mit $y(0) = 0$ fortsetzen, denn

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) - 1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k)!}$$

und die Reihe hat den Wert 0 an der Stelle $x = 0$. Weiterhin ist sie eine überall konvergente Potenzreihe und somit unendlich oft differenzierbar. Wir rechnen leicht nach, dass sie auch die Differentialgleichung in $x = 0$ erfüllt.