Musterlösung 12

1. In Serie 11, Aufgabe 3b) haben wir gezeigt, dass das auf $\mathbb{R}^2$ definierte Vektorfeld

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2+5 \\ 2xy-8 \end{pmatrix},$$

ein Potential besitzt. Daraus folgt, dass das Kurvenintegral

$$f(P) := \int_{P_0}^{P} K(x) \cdot dx$$

nicht von der Wahl des Weges von P_0 nach P abhängt. Es ist für jeden festen Anfangspunkt $P_0 \in \mathbb{R}^2$ ein Potential von K. Der Einfachheit halber wählen wir als Weg die gerade Strecke

$$\gamma \,:\, t \mapsto \begin{pmatrix} xt \\ yt \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1],$$

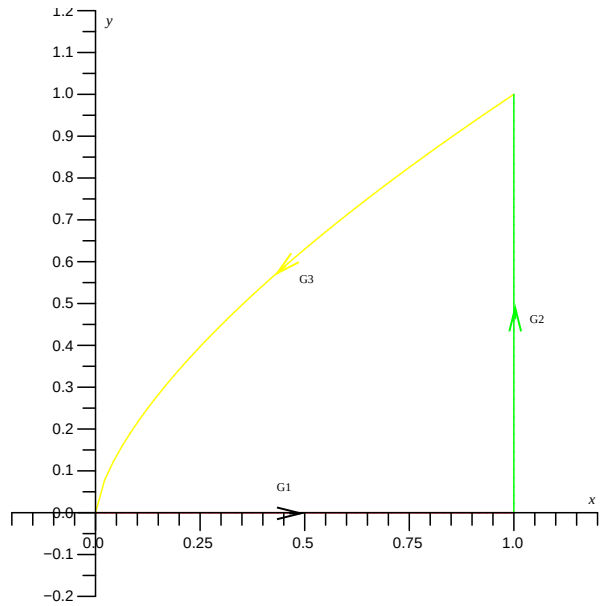
von $P_0 := \binom{0}{0}$ nach $P = \binom{x}{y}$. Das Potential f ergibt sich dann als

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \int_\gamma K(x) \cdot dx \\
&:= \int_0^1 K(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 K\begin{pmatrix} xt \\ yt \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} y^2t^2+5 \\ 2xyt^2-8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \Big[xy^2t^2 + 5x + 2xy^2t^2 - 8y\Big]\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[xy^2t^3 + (5x-8y)t\Big]_{t=0}^{1} \\
&= xy^2 + 5x - 8y\,.
\end{aligned}$$

Dies ist bis auf eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ dasselbe Potential wie in Serie 11, Aufgabe 3b).

2. **a)** Zunächst skizzieren wir den Rand ∂B des Gebietes

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^{2/3} \right\}.$$



Nun parametrisieren wir die drei Randstücke G_1, G_2 und G_3 durch die drei Kurvenstücke

$$\gamma_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \ \gamma_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \ \text{ und } \ \gamma_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ (1-t)^{2/3} \end{pmatrix},$$

wobei wir jeweils $t \in [0,1]$ wählen. Die Parametrisierungen der Randkurvenstücke sind so gewählt, dass der Rand ∂B im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

Die Tangentialvektoren an diese Kurvenstücke sind

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{ und } \ \dot\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3}\,(1-t)^{-1/3} \end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} I_1 \ &:= \ \int_{\gamma_1} K \cdot dx = \int_0^1 K(\gamma_1(t)) \cdot \dot\gamma_1(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} x(t)\, y(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \ \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 0\, dt = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_2 \ &:= \ \int_{\gamma_2} K \cdot dx = \int_0^1 K(\gamma_2(t)) \cdot \dot\gamma_2(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} x(t)\, y(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \ \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 1\, dt = 1 \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

sowie

$$
\begin{aligned}
I_3 \;:=\; & \int_{\gamma_3} K \cdot dx = \int_0^1 K(\gamma_3(t)) \cdot \dot{\gamma}_3(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} x(t)\, y(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} dt \\
= \; & \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^{5/3} \\ (1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3}\,(1-t)^{-1/3} \end{pmatrix} dt \\
= \; & \int_0^1 \Big[-(1-t)^{5/3} - \frac{2}{3}\,(1-t)^{5/3} \Big]\, dt = \int_0^1 -\frac{5}{3}\,(1-t)^{5/3}\, dt \\
= \; & \left[\frac{5}{8}\,(1-t)^{8/3} \right] \Big|_0^1 = -\frac{5}{8}\,.
\end{aligned}
$$

Wir fassen die Integrale zusammen und erhalten

$$
I_a = \int_{\partial B} K \cdot dx = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}\,.
$$

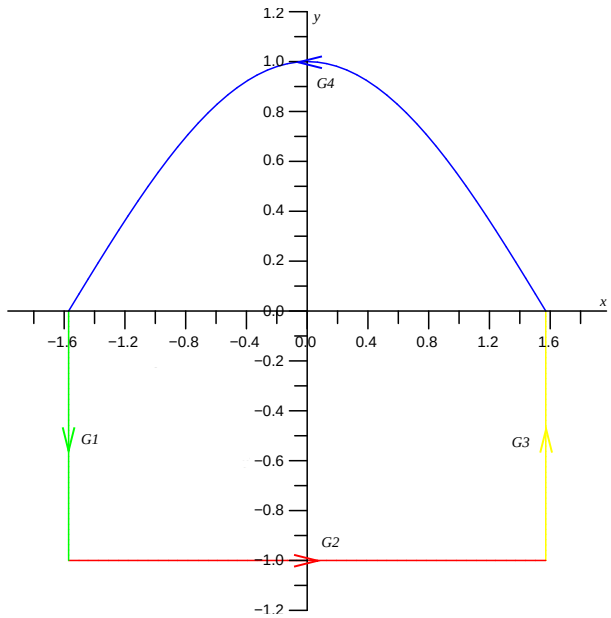
Durch Anwendung des Satzes von Green erhalten wir das gleiche Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
I_a \;=\; & \int_{\partial B} K \cdot dx = \int_B \mathrm{rot} K\, d\mathrm{vol}_2 = \int_B \Big[\frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} \Big]\, d\mathrm{vol}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \\
= \; & \int_0^1 \int_0^{x^{2/3}} [\, 2x - x \,]\, dy\, dx = \int_0^1 x \cdot x^{2/3}\, dx = \int_0^1 x^{5/3}\, dx = \frac{3}{8}\,.
\end{aligned}
$$

Bitte wenden!

b) Zunächst skizzieren wir den Rand ∂B des Gebietes

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2},\ -1 \le y \le \cos(x) \right\}.$$



Nun parametrisieren wir die vier Randstücke G_1, G_2, G_3 und $-G_4$ durch die vier Kurvenstücke

$$\gamma_1 : t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ -t \end{smallmatrix}\right), \quad t \in [\,0,1\,], \qquad \gamma_2 : t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} -\frac{\pi}{2}+t\pi \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \quad t \in [\,0,1\,],$$
$$\gamma_3 : t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \frac{\pi}{2} \\ t-1 \end{smallmatrix}\right), \quad t \in [\,0,1\,], \qquad \gamma_4 \,:\, t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} t \\ \cos(t) \end{smallmatrix}\right), \quad t \in \left[\,-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\,\right].$$

Dabei ist γ_4 im Uhrzeigersinn orientiert. Die anderen Kurvenstücke sind im Gegenuhrzeigersinn orientiert.

Die Tangentialvektoren an die Kurvenstücke sind

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix},\ \dot\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \dot\gamma_4(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} I_1 \;&:=\; \int_{\gamma_1} K \cdot dx = \int_0^1 K(\gamma_1(t)) \cdot \dot\gamma_1(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} -t \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 1\, dt = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 \;&:=\; \int_{\gamma_2} K \cdot dx = \int_0^1 K(\gamma_2(t)) \cdot \dot\gamma_2(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} -1 \\ \sin(-\frac{\pi}{2} + t\pi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} dt = -\pi \int_0^1 1\, dt = -\pi \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

und

$$\begin{aligned} I_3 &:= \int_{\gamma_3} K \cdot dx = \int_0^1 K(\gamma_3(t)) \cdot \dot{\gamma}_3(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t-1 \\ \sin(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 1\, dt = 1 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} I_4 &:= \int_{\gamma_4} K \cdot dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} K(\gamma_4(t)) \cdot \dot{\gamma}_4(t)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos(t) - \sin^2(t) \right] dt \\ &= \sin(t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(t)\cos(t)}{2} \right] \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Zusammengesetzt erhalten wir

$$I_b = \int_{\partial B} K \cdot dx = I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 1 - \pi + 1 - \left[2 - \frac{\pi}{2} \right] = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Durch Anwendung des Satzes von Green erhalten wir das gleiche Ergebnis:

$$\begin{aligned} I_b &= \int_{\partial B} K \cdot dx = \int_B \mathrm{rot} K\, d\mathrm{vol}_2 = \int_B \left[\frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} \right] d\mathrm{vol}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^{\cos(x)} [\cos(x) - 1]\, dy\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos(x) - 1] \cdot [\cos(x) + 1]\, dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos^2(x) - 1 \right] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\, dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} \right] \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

3. **Parametrisierung der Kurve:**
Wir führen Polarkoordinaten mit $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$ ein. Dann wird die Gleichung

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$$

zu

$$r^2 = r + r \cdot \cos(\varphi).$$

Also ist für Punkte auf der Kurve entweder $r = 0$ (das ist der Nullpunkt) oder

$$r = 1 + \cos(\varphi),$$

für $\varphi \in [0, 2\pi]$. Das ergibt die Parametrisierung

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi \mapsto \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos(\varphi) \\ r(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) + \cos^2(\varphi) \\ \sin(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

mit

$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) - 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) + \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Die Kurve wird im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen.

Berechnen der Fläche:

Wir wenden nun den Satz von Green an für $v\binom{x}{y} = \binom{-y}{0}$. Da $\operatorname{rot}(v) = -\frac{\partial}{\partial y}(-y) = 1$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}_2(\Omega) &:= \int_\Omega 1 d\operatorname{vol}_2 = \int_\Omega \operatorname{rot}(v) d\operatorname{vol}_2 = \int_{\partial\Omega} v \cdot d\left(\tbinom{x}{y}\right) \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -(\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) - 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) + \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \end{pmatrix} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) \cdot (1 + \cos(\varphi))(1 + 2\cos(\varphi))\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi)\, d\varphi + 3\int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi)\cos(\varphi)\, d\varphi + 2\int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi)\, d\varphi \\
&= \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \sin^3(\varphi) + \frac{1}{32}(4\varphi - \sin(4\varphi))\right]_0^{2\pi} \\
&= \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

4. Wir parametrisieren die Randkurve ∂B des Bumerangs B durch

$$t\colon [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos^2(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung des Flächeninhaltes von B betrachten wir das Vektorfeld

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \text{ mit } \operatorname{rot} L := \frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} = 1.$$

Mit Hilfe des Satzes von Green erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}_2(B) &= \int_B 1 d\operatorname{vol}_2 = \int_B \operatorname{rot}(L)\, d\operatorname{vol}_2 = \int_{\partial B} L \cdot dx = \int_{\partial B} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot d\left(\tbinom{x}{y}\right) \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ x(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} x(t)\, \dot{y}(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[4\cos^2(t) + \cos(t)\Big] \cos(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt = \pi.
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen verschwindet die y–Koordinate y_s des Schwerpunktes und es bleibt die x–Koordinate x_s zu berechnen. Dazu betrachten wir das Vektorfeld

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} \text{ mit } \operatorname{rot} K = \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} = x.$$

Wiederum mit Hilfe des Satzes von Green und unter Verwendung der in als Hinweis gegebenen Integrale

Siehe nächstes Blatt!

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{\mathrm{vol}_2(B)} \int_B x \, d\mathrm{vol}_2 = \frac{1}{\pi} \int_B \mathrm{rot}(K) \, d\mathrm{vol}_2 \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\partial B} K \cdot dx = \frac{1}{\pi} \int_{\partial B} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} \cdot d\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ x(t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t) \, \dot{y}(t) \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big[4 \, \cos^2(t) + \cos(t) \Big]^2 \cos t \, dt \\
&\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big[16 \cos^5(t) + 8 \cos^4(t) + \cos^3(t) \Big] \, dt = \frac{8}{2\pi} \frac{3\pi}{4} = 3.
\end{aligned}
$$

Der Schwerpunkt des Bumerangs ist also

$$
S_B = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

5. **a)** Der Rand ∂B des Dreiecks B wird durch die drei Kurven

$$
\gamma_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}, \ \gamma_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{ und } \ \gamma_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}
$$

für $t \in [\,0, 1\,]$ parametrisiert, welche die Tangentialvektoren

$$
\dot{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \dot{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{und } \dot{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

haben, mit den Beträgen $|\dot{\gamma}_1| = |\dot{\gamma}_2| = 1$ und $|\dot{\gamma}_3| = \sqrt{2}$. Des Weiteren benötigen wir die nach aussen zeigenden Normalenvektorfelder

$$
n_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ \text{und } n_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Der Fluss des Vektorfeldes K durch den Rand ∂B des Dreiecks B von innen nach aussen ist

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial B} K \cdot n \, d\mathrm{vol}_1 &= \sum_{i=1}^{2} \int_{\gamma_i} K \cdot n_i \, d\mathrm{vol}_1 = \sum_{i=1}^{2} \int_0^1 K(\gamma(t)) \cdot n_i(\gamma(t)) \, |\dot{\gamma}_i(t)| \, dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} -(1-t)^2 \\ (1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} 1 \, dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} 1 \, dt \\
&\quad + \int_0^1 \begin{pmatrix} 2(1-t)t - t^2 \\ (1-t)^2 + t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \sqrt{2} \, dt \\
&= \int_0^1 [\,1-t\,]^2 dt - \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 \Big[2(1-t)t - t^2 + (1-t)^2 + t^2 \Big] \, dt \\
&= \int_0^1 \Big[(t-1)^2 - t^2 + (t-1)^2 - 2t(t-1) \Big] \, dt \\
&= \int_0^1 \Big[t^2 - 2t + 1 - t^2 + t^2 - 2t + 1 - 2t^2 + 2t \Big] \, dt \\
&= \int_0^1 \Big[-t^2 - 2t + 2 \Big] \, dt = \Big[-\frac{t^3}{3} - t^2 + 2t \Big]_0^1 = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Bitte wenden!

b) Die Divergenz von K ist

$$\operatorname{div} K = \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y} = 2y + 2y = 4y$$

und mit Hilfe des Satzes von Gauss erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\partial B} K \cdot n \, d\mathrm{vol}_1 &= \int_B \operatorname{div} K \, d\mathrm{vol}_1 = \int_0^1 \int_0^{1-x} 4y \, dy \, dx \\ &= 4 \int_0^1 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx = 2 \int_0^1 [\,1 - x\,]^2 \, dx = -\frac{2}{3} [\,1 - x\,]^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$