Musterlösung 3

1. **a)** Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + (2-3i)\lambda - 6i = 0$ hat die Lösungen $\lambda_0 = -2$ und $\lambda_1 = 3i$, beide mit Multiplizität 1. Die allgemeine komplexe Lösung der Gleichung ist damit

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{3ix}$$

mit Konstanten $A, B \in \mathbb{C}$.

b) Die charakteristische Gleichung $\lambda^3 + i\lambda^2 + 2\lambda = 0$ hat die Lösungen $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -2i$, alle mit Multiplizität 1. Die allgemeine komplexe Lösung der Gleichung ist damit

$$y(x) = A + Be^{ix} + Ce^{-2ix}$$

mit Konstanten $A, B, C \in \mathbb{C}$.

2. Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ hat die Lösungen $\lambda_0 = -1$ und $\lambda_1 = 2$, beide mit Multiplizität 1; damit ist die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung $y'' - y' - 2x = 0$

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$. Um eine partikuläre Lösung der Gleichung zu finden, machen wir den Ansatz $y(x) = Ce^x$ (die Inhomogenität ist e^{cx} mit $c = 1$, und 1 ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung). Einsetzen des Ansatzes in die DGL ergibt

$$y'' - y' - 2y = Ce^x - Ce^x - 2Ce^x = -2Ce^x = e^x,$$

und damit $C = -1/2$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist folglich

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^x + Ae^{-x} + Be^{2x}$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$. Die Randbedingungen führen zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} + A + B &= \frac{1}{2}(1 - e^2), \\ -\frac{1}{2}e + Ae^{-1} + Be^2 &= 0, \end{aligned}$$

woraus wir $A = 1 - \frac{1}{2}e^2 - (e^2 - 1)/(e^3 - 1)$ und $B = (e^2 - 1)/(e^3 - 1)$ erhalten.

3. **a)** Sei $(x, y) : I \to \mathbb{R}^2$ eine auf einem Intervall I definierte Lösung des Differentialgleichungssystems. Unter Verwendung der Kettenregel und der Tatsache, dass (x, y) eine Lösung ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(x,y) &= \frac{d}{dt}\big(a\log y - by - cx + d\log x\big) \\ &= a\frac{1}{y}\dot{y} - b\dot{y} - c\dot{x} + d\frac{1}{x}\dot{x} \\ &= a(cx - d) - b(cx - d)y - c(a - by)x + d(a - by) \\ &= (-ad + ad) + (ac - ac)x + (bc - bc)y + (-bc + bc)xy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Folglich ist E entlang jeder Lösungskurve konstant, also eine Erhaltungsgrösse.

Bitte wenden!

b) Sei $t \mapsto (x(t), y(t))$ eine Lösung mit maximalem Existenzintervall. Nach (a) ist dann die Abbildung $t \mapsto E(x(t), y(t))$ konstant, sagen wir gleich S. Die Lösung liegt also zu allen Zeiten t in der Niveaumenge $E^{-1}(S) \subset \mathbb{R}^2$. Wir werden zeigen, dass diese in einer kompakten Teilmenge R von $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^{>0}$ enthalten ist. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz existiert aber jede Maximallösung entweder für alle Zeiten oder verlässt jede kompakte Teilmenge des Definitionsbereichs nach endlicher Zeit. Da in unserem Fall die Lösung die kompakte Teilmenge R nicht verlässt, folgt die Existenz der Lösung für alle Zeiten.

Da $\log x/x$ und damit auch $d \log x/(cx)$ für $x \to \infty$ gegen 0 streben, folgt

$$-cx + d \log x \to -\infty \quad \text{für } x \to \infty. \tag{1}$$

Ausserdem gilt $\log x \to -\infty$ für $x \to 0+$ und somit

$$-cx + d \log x \to -\infty \quad \text{für } x \to 0+ . \tag{2}$$

Weil zudem die Funktion $\mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -cx + d \log x$ stetig ist, besitzt sie damit ein globales Maximum M_x. Mit dem selben Argument sieht man, dass die Funktion $\mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto a \log y - by$, ein globales Maximum M_y besitzt. Wiederum wegen (1) und (2) existieren Konstanten $0 < \alpha < \beta$ und $0 < \gamma < \delta$, so dass für alle x mit $x \notin [\alpha, \beta]$ und alle $y \notin [\gamma, \delta]$ die Ungleichungen

$$-cx + d \log x \quad < \quad S - M_y \tag{3}$$
$$-ay + c \log y \quad < \quad S - M_x \tag{4}$$

gelten. Für alle (x, y) ausserhalb des Rechtecks

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^{>0} \ : \ \alpha \leq x \leq \beta, \ \gamma \leq y \leq \delta\right\}$$

gilt damit mindestens eine der Ungleichungen (3) oder (4). Da ausserdem $-cx + d \log x \leq M_x$ und $-ay + c \log y \leq M_y$ gelten, folgt

$$E(x, y) = -ay + c \log y - cx + d \log x < S.$$

Insbesondere ist die Niveaumenge $E^{-1}(S)$ ganz in R enthalten. Aber R ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

4. a) Wir rechnen mit der Kettenregel

$$\dot{E} = \dot{x}\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{x^2} = \dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0 \, .$$

Die Klammer verschwindet, weil x eine Lösung der Differentialgleichung ist.

b) Wir betrachten zunächst den Fall $E = 0$. Dann ist

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{1}{x} \, .$$

Durch Separation erhalten wir

$$t = \int_0^t \mathrm{d}t' = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \sqrt{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(x(t)^{\frac{3}{2}} - x_0^{\frac{3}{2}}\right)$$

und Auflösen nach $x(t)$ liefert

$$x(t) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}t + x_0^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \, .$$

Siehe nächstes Blatt!

Daraus folgt $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$.

Sei $E > 0$. Auf dem Definitionsintervall $[0, T[$ der Lösung x gilt $x > 0$ und somit

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = E + \frac{1}{x} > E > 0$$

Also ist

$$|\dot{x}| > \sqrt{2E} > 0 \ .$$

$\dot{x}$ ist stetig, kann also nicht das Vorzeichen wechseln, sonst hätten wir einen Widerspruch zum Zwischenwertsatz. Ursprünglich ist $\dot{x}(0) = v_0 > 0$. Also ist $\dot{x} > \sqrt{2E}$.

Sei $t \in]0, T[$ beliebig. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\tau \in]0, t[$ mit $x(t) = x_0 + \dot{x}(\tau)t$. Aus der obigen Abschätzung folgt also

$$x(t) \ = \ x_0 + \dot{x}(\tau)t \ > x_0 + \sqrt{2E} \cdot t \ .$$

Ist $T = \infty$, d.h., existiert die maximale Lösung für alle Zeiten, so folgt daraus $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$. Wir müssen also noch zeigen, dass die Lösung für alle Zeiten existiert, also $T = \infty$.

Nach dem Satz von Taylor gibt es für alle $t \in]0, T[$ ein $\tau \in]0, t[$ mit

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{\ddot{x}(\tau)}{2} t^2.$$

Da x eine Lösung ist, gilt

$$\ddot{x}(\tau) = -\frac{1}{x(\tau)^2} < 0,$$

und daher

$$x(t) < x_0 + v_0 t.$$

Nehmen wir nun an, dass $T < \infty$ ist. Auf dem gesamten Intervall $[0, T[$ gilt dann

$$x_0 \ \leq \ x(t) \ \leq \ x_0 + v_0 T.$$

Weiterhin ist

$$2E < \dot{x}^2 = 2E + \frac{2}{x} \leq 2E + \frac{2}{x_0} \ .$$

Also sind x, $\dot{x}$, sowie t beschränkt, und $(x, \dot{x})$ bleiben in einer kompakten Teilmenge von $]0, \infty[\times]0, \infty[$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass die Lösung maximal ist. Daher muss $T = \infty$.

c) Wir nehmen an, dass $E < 0$ ist. Dann gilt

$$\frac{1}{x} = \frac{\dot{x}^2}{2} - E \geq -E > 0 \ ,$$

also

$$x \leq -\frac{1}{E}$$

sowie

$$\ddot{x} = -\frac{1}{x^2} \leq -E^2 \ .$$

Nach dem Satz von Taylor gibt es für alle $t \in]0, T[$ ein $\tau \in]0, t[$, so dass

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{\ddot{x}}{2} t^2 \ .$$

Bitte wenden!

Mit der Abschätzung von $\ddot{x}$ folgt

$$x(t) \leq x_0 + v_0 t - E^2 t^2 \ .$$

Für grosse t wird die rechte Seite negativ. Also kann die Lösung nicht für alle Zeiten existieren und $T < \infty$.

Wir zeigen, dass $\lim_{t \to T} x(t) = 0$. Da $E < 0$, gilt

$$\dot{x}^2 = 2E + \frac{2}{x} \leq \frac{2}{x} \ .$$

Auf der anderen Seite haben wir gezeigt, dass $x \leq -\frac{1}{E}$. Für jedes $0 < \varepsilon < -\frac{1}{E}$ ist

$$\left[\varepsilon, -\frac{1}{E}\right] \times \left[-\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}, \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right] \times [0, T]$$

eine kompakte Teilmenge des Definitionsbereiches der Differentialgleichung. Die maximale Lösung muss diese verlassen und das geht wegen der Schranken an x und $\dot{x}$ nur, wenn es ein $t_0 < T$ gibt mit $x(t) < \varepsilon$ für alle $t > t_0$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt, dass $\lim_{t \to T} x(t) = 0$.

5. **a)** Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 1 \ \text{ und } \ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 \, .$$

b) Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y \, \mathrm{e}^{xy} \ \text{ und } \ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x \, \mathrm{e}^{xy} \, .$$

c) Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y x^{y-1} \ \text{ und } \ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{e}^{y \ln(x)} = \ln(x) \, \mathrm{e}^{y \ln(x)} = x^y \ln(x) \, .$$

d) Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\left(x^2 + y^2\right) - (x-y) \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2 + 2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{-\left(x^2 + y^2\right) - (x-y) \cdot 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \, .$$

e) Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2xy \sin(xy) + x^2 y^2 \cos(xy)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2 \sin(xy) + x^3 y \, \cos(xy).$$

f) Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = y^2 z^3, \ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = 2xyz^3 \ \text{ und } \ \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = 3xy^2 z^2.$$