Musterlösung 4

1. Die Funktion $y(t)$ ist charakterisiert durch die Eigenschaften

$$y'(t) = e^{-t^2} \quad \text{und} \quad y(1) = 42\,.$$

Die verallgemeinerte Kettenregel liefert

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d} f\left(x(t), y(t)\right) &= \nabla f\left(x(t), y(t)\right) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t), y(t)\right) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t), y(t)\right) \cdot y'(t) \\
&= 2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) \\
&= 2\cos(\pi t) \cdot (-\pi \sin(\pi t)) + 2y(t) \cdot e^{-t^2} \\
&= -2\pi \sin(\pi t)\cos(\pi t) + 2y(t) \cdot e^{-t^2} \\
\frac{d}{d}\left(f\left(x(t), y(t)\right)\right)\Big|_{t=1} &= -2\pi \underbrace{\sin(\pi)}_{0} \cos(\pi) + 2\underbrace{y(1)}_{42} \cdot e^{-1^2} = \frac{84}{e}\,.
\end{aligned}$$

2. Linearisierung in zwei Dimensionen:
Es sei

$$f(x, y) := \arctan\big(2x^2 + 3xy - 4y^2\big)\,. \tag{1}$$

Wir approximieren f durch die Linearisierung

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \left\langle \boldsymbol{\nabla} f(x, y), \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \right\rangle. \tag{2}$$

Der Gradient ist

$$\boldsymbol{\nabla} f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4x + 3y}{1 + (2x^2 + 3xy - 4y^2)^2} \\ \dfrac{3x - 8y}{1 + (2x^2 + 3xy - 4y^2)^2} \end{bmatrix} \tag{3}$$

und hat an der Stelle $(1, 1)$ den Wert

$$\boldsymbol{\nabla} f(1, 1) = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Weiter gilt $f(1, 1) = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$, so dass folgt

$$\begin{aligned}
f(1 + 0.02, 1 - 0.03) &\approx \frac{\pi}{4} + \left\langle \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.03 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{\pi}{4} + \frac{7}{2} \cdot 0.02 + \frac{5}{2} \cdot 0.03 \\
&\approx 0.9304.
\end{aligned} \tag{5}$$

Mit Hilfe des Taschenrechners finden wir den auf vier Stellen gerundeten exakten Wert, d.h.

$$f(1.02, 0.97) \approx 0.9096. \tag{6}$$

Bitte wenden!

3. Wir berechnen $\dot{F}(0)$, wobei die Funktion $t \mapsto F(t)$ durch

$$F(t) := \int_1^2 \frac{e^{tx}\sqrt{1+t^2x}}{x\,(x+1)}\,dx$$

definiert ist. Der Integrand ist stetig differenzierbar als Funktion von t und x. Daher können wir unter dem Integral wie folgt differenzieren.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t) &= \frac{d}{dt}\int_1^2 \frac{e^{tx}\sqrt{1+t^2x}}{x\,(x+1)}\,dx \\ &= \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{tx}\sqrt{1+t^2x}}{x\,(x+1)}\right)dx = \int_1^2 \frac{x\,e^{tx}\sqrt{1+t^2x}\;+\;e^{tx}\frac{tx}{\sqrt{1+t^2x}}}{x\,(x+1)}\,dx\,.\end{aligned}$$

Folglich erhalten wir für $t=0$, dass

$$\frac{d}{dt}F(t)\bigg|_{t=0} = \int_1^2 \frac{x}{x\,(x+1)}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|\,\bigg|_{x=1}^{x=2} = \ln\frac{3}{2}\,.$$

4. Laut Vorlesung gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x = f\big(b(t),t\big)\cdot b'(t) - f\big(a(t),t\big)\cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x\,,$$

falls f stetig differenzierbar ist als Funktion der Variablen t und x und die Funktionen a und b differenzierbar sind.

Im vorliegenden Fall sind

$$a(t) = \sin t \qquad \text{und} \qquad b(t) = \cos t,$$

und andererseits

$$f(x,t) = \frac{e^{tx^2}}{x} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{x^2e^{tx^2}}{x} = xe^{tx^2}.$$

Es sind also alle Voraussetzungen für oben stehende Formel erfüllt und es folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{I}'(t) \;=\; \frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{d}t}(t) \;&=\; \frac{e^{tx^2}}{x}\bigg|_{x=\cos t}\cdot(-\sin t) - \frac{e^{tx^2}}{x}\bigg|_{x=\sin t}\cdot\cos t + \int_{\sin t}^{\cos t} xe^{tx^2}\,\mathrm{d}x \\ &=\; \frac{e^{t\cos^2 t}}{\cos t}\cdot(-\sin t) - \frac{e^{t\sin^2 t}}{\sin t}\cdot\cos t + \frac{e^{tx^2}}{2t}\bigg|_{x=\sin t}^{x=\cos t} \\ &=\; -\frac{e^{t\cos^2 t}\sin^2 t + e^{t\sin^2 t}\cos^2 t}{\sin t\,\cos t} + \frac{e^{t\cos^2 t} - e^{t\sin^2 t}}{2t}\,.\end{aligned}$$