Musterlösung 5

1. **a)** Es gilt

$$\begin{aligned} f_x &= -\tfrac{1}{x^2y} & f_{xx} &= \tfrac{2}{x^3y} \\ f_y &= -\tfrac{1}{xy^2} & f_{yy} &= \tfrac{2}{xy^3} \\ & & f_{xy} &= \tfrac{1}{x^2y^2} = f_{yx}\ . \end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung zweiter Ordnung im Punkt $(1,2)$ ist

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(1,2) + \nabla f(1,2)\cdot((x,y)-(1,2))^T \\ &+ \frac{1}{2}\left((x,y)-(1,2)\right)\nabla^2 f(1,2)\left((x,y)-(1,2)\right)^T + o(((x,y)-(1,2))^2)\ . \end{aligned}$$

Daher haben wir im Punkt $(1,2)$

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(y-2) \\ &+ \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(x-1)(y-2) + \frac{1}{8}(y-2)^2 + o(((x,y)-(1,2))^2)\ . \end{aligned}$$

Aliter: Wir wissen, dass wenn f durch eine Potenzreihe darstellbar ist, diese mit der Taylorreihe übereinstimmt. Um mit der geometrischen Reihe entwickeln zu können, schreiben wir f wie folgt um:

$$f(x,y) = \frac{1}{xy} = \frac{1}{(1-(1-x))\,(2-(2-y))} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-(1-x))\left(1-\left(1-\frac{y}{2}\right)\right)}\ .$$

Für $|1-x|<1$ und $\left|1-\frac{y}{2}\right|<1$ folgt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\left(1-\frac{y}{2}\right)^l\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-(x-1)+(x-1)^2+o((x-1)^2)\right) \\ &\quad\cdot\left(1-\left(\frac{y}{2}-1\right)+\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+o(\left(\frac{y}{2}-1\right)^2)\right)\ . \end{aligned}$$

Multiplizieren wir aus bis zu Termen zweiter Ordnung, gelangen wir auf dasselbe Ergebnis wie durch Ableiten.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} g_x &= \tfrac{z}{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} & g_{xx} &= \tfrac{z}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \\ g_y &= -\tfrac{xz}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} & g_{yy} &= \left[\tfrac{2xz}{y^3}+\tfrac{x^2z}{y^4}\right]\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \\ g_z &= \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} & g_{zz} &= 0 \\ & & g_{xy} &= -\left[\tfrac{z}{y^2}+\tfrac{xz}{y^3}\right]\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} = g_{yx} \\ & & g_{xz} &= \tfrac{1}{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} = g_{zx} \\ & & g_{yz} &= -\tfrac{x}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} = g_{zy}\ . \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung von g in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x,y,z) =& f(1,1,1) + \nabla f(1,1,1) \cdot ((x,y,z) - (1,1,1))^T \\ &+ \frac{1}{2}\left((x,y,z) - (1,1,1)\right) \nabla^2 f(1,1,1) \left((x,y,z) - (1,1,1)\right)^T \\ &+ o(((x,y,z) - (1,1,1))^2)\,. \end{aligned}$$

Daher haben wir im Punkt $(1,1,1)$

$$\begin{aligned} f(x,y,z) =& e\Bigg(1 + (x-1) - (y-1) + (z-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 \\ &+ \frac{3}{2}(y-1)^2 - 2(x-1)(y-1) + (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)\Bigg) \\ &+ o(((x,y,z) - (1,1,1))^2)\,. \end{aligned}$$

2. Zunächst berechnen wir die erste Ableitung

$$\nabla f(x,y) = \Big(f_x(x,y), f_y(x,y)\Big) = \Big(y^2 + \sin x, 2xy\Big)\,.$$

Für einen kritischen Punkt muss diese verschwinden, es muss also gelten $y^2 + \sin x = 0$ und $2xy = 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt, dass x oder y verschwinden muss. Für $x = 0$ liefert die erste Gleichung $y = 0$, und für $y = 0$ ist die erste Gleichung äquivalent zu $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die kritischen Punkte von f sind also genau die Punkte der Form $(x,y) = (k\pi, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Zur Bestimmung des Typs berechnen wir die zweite Ableitung, die Hessesche Matrix:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} \cos x & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}\,.$$

In einem kritischen Punkt $(x,y) = (k\pi, 0)$ ist diese:

$$\nabla^2 f(k\pi, 0) = \begin{bmatrix} \cos k\pi & 0 \\ 0 & 2k\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2k\pi \end{bmatrix}\,.$$

Dies ist bereits eine Diagonalmatrix; ihre Eigenwerte stehen auf der Diagonalen. Daher haben wir die folgenden Fälle:

$k > 0$	gerade	$\Rightarrow$ beide Eigenwerte sind positiv	$\Rightarrow$ lokales Minimum
$k > 0$	ungerade	$\Rightarrow$ ein negativer und ein positiver Eigenwert	$\Rightarrow$ Sattelpunkt
$k = 0$		$\Rightarrow$ ein Eigenwert ist 0	$\Rightarrow$ ausgearteter Punkt
$k < 0$	gerade	$\Rightarrow$ ein positiver und ein negativer Eigenwert	$\Rightarrow$ Sattelpunkt
$k < 0$	ungerade	$\Rightarrow$ beide Eigenwerte negativ	$\Rightarrow$ lokales Maximum

3. Der Gradient der Funktion f_λ ist

$$\nabla f_\lambda(x,y,z) = \left(2x + 4x^3, 2y + \lambda z + 4y^3, 2z + \lambda y + 4z^3\right)$$

und die Hessematrix berechnet sich zu

$$\nabla^2 f_\lambda(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 + 12x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + 12y^2 & \lambda \\ 0 & \lambda & 2 + 12z^2 \end{pmatrix}\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

Offensichtlich ist der Ursprung $(0,0,0)$ ein kritischer Punkt von f_λ. Die Hessematrix ist dort

$$\nabla^2 f_\lambda(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda \\ 0 & \lambda & 2 \end{pmatrix} .$$

Um den kritischen Punkt zu klassifizieren berechnen wir die Eigenwerte von $\nabla^2 f_\lambda$. Dazu faktorisieren wir das charakteristische Polyom

$$\chi(\alpha) = \det \begin{pmatrix} 2-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2-\alpha & \lambda \\ 0 & \lambda & 2-\alpha \end{pmatrix} = (2-\alpha)\left((2-\alpha)^2 - \lambda^2\right) = (2-\alpha)(2+\lambda-\alpha)(2-\lambda-\alpha)$$

und lesen daraus die Eigenwerte

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 2+\lambda, \quad \alpha_3 = 2-\lambda$$

ab als Nullstellen des Polynoms.

Falls $|\lambda| < 2$ ist, sind alle drei Eigenwerte positiv. Folglich ist die Hessematrix H_{f_λ} positiv definit und der Ursprung ein lokales Minimum.

Falls $|\lambda| > 2$ ist, sind zwei Eigenwerte positiv und einer negativ. Folglich ist die Hessematrix H_{f_λ} indefinit und der Ursprung kein Extremum.

Für $|\lambda| = 2$ ist einer der Eigenwerte 0 und daher die Hessematrix ausgeartet. Für $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ gilt

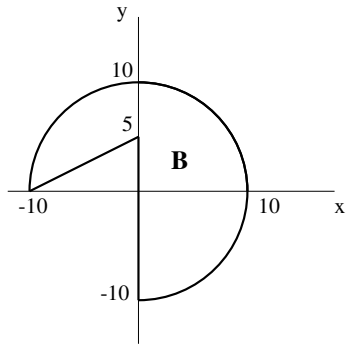
$$f_{\pm 2}(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \pm 2yz + x^4 + y^4 + z^4 = x^2 + (y \pm z)^2 + x^4 + y^4 + z^4 > 0 ,$$

denn alle Terme sind grösser oder gleich null und mindestens ein Term vierter Potenz ist strikt positiv. Folglich ist der Ursprung ein isoliertes lokales Minimum.

4. Die Menge B setzt sich zusammen aus den drei Eckpunkten

$$P_1 = (0,-10)\,, P_2 = (0,5)\,, P_3 = (-10,0)\,,$$

den Randbögen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und dem Inneren $\widetilde{B}$.



Die kritischen Punkte von f in $\widetilde{B}$ müssen das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\nabla f = (2x-8, 2y-6) = (0,0)\,.$$

Bitte wenden!

Wir erhalten den Punkt $P_4 = (4,3)$, der, wie man sich leicht überzeugt, tatsächlich in $\widetilde{B}$ liegt (wegen $4^2 + 3^2 = 25 < 100 = 10^2$).

Längs γ_1 ist $x = 0$ und $-10 < y < 5$. Die bedingt kritischen Punkte von f auf γ_1 sind die kritischen Punkte der ersetzten Funktion

$$y \mapsto f(0,y) = y^2 - 6y\,.$$

Die Gleichung $0 = \frac{d}{dy}\left(f(0,y)\right) = 2y - 6$ liefert $y = 3$ und damit den Punkt $P_5 = (0,3)$, der auch wirklich auf γ_1 liegt.

Längs γ_2 ist $x = -10 + 2y$ und $0 < y < 5$. Es gilt daher, die kritischen Punkte der Funktion

$$y \mapsto f(-10+2y, y) = 5y^2 - 62y + 180$$

zu bestimmen. Es muss also gelten

$$0 = \frac{d}{dy} f(-10+2y, y) = 10y - 62\,.$$

Daraus folgt $y = 6.2$ und $x = 2.4$, aber der Punkt mit diesen Koordinaten liegt nicht auf γ_2.

Für γ_3 benutzen wir Lagrangemultiplikatoren mit der Nebenbedingung $F(x,y) := x^2 + y^2 - 100 \stackrel{!}{=} 0$. Es muss gelten:

$$\begin{array}{rclcrcl} f_x & = & \lambda F_x & \Leftrightarrow & 2x - 8 & = & 2\lambda x \\ f_y & = & \lambda F_y & \Leftrightarrow & 2y - 6 & = & 2\lambda y \\ F & = & 0 & \Leftrightarrow & x^2 + y^2 & = & 100\,. \end{array}$$

Auflösen ergibt $\lambda \neq 1$ und

$$\begin{array}{rclcrcl} x & = & \frac{4}{1-\lambda}; & & y & = & \frac{3}{1-\lambda} \\ \frac{16}{(1-\lambda)^2} + \frac{9}{(1-\lambda)^2} & = & 100; & & \frac{1}{(1-\lambda)^2} & = & 4 \\ \lambda & = & \frac{1}{2} \text{ oder } \frac{3}{2}\,. & & & & \end{array}$$

Dies liefert $(x,y) = \pm(8,6)$, von denen aber nur der Punkt $P_6 = (8,6)$ auf γ_3 liegt. Wir haben also folgende "Kandidaten":

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
(x,y)	$(0,-10)$	$(0,5)$	$(-10,0)$	$(4,3)$	$(0,3)$	$(8,6)$
$f(x,y)$	160	-5	180	-25	-9	0

Die globalen Extrema sind also das Maximum 180 im Punkt P_3 und das Minimum -25 im Punkt P_4.