Musterlösung 6

1. Die Funktion

$$F(x,y) := \mathrm{e}^y + y + \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$$

ist beliebig oft stetig differenzierbar. Ihre ersten partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned} F_x(x,y) &= x-1 \\ F_y(x,y) &= \mathrm{e}^y + 1. \end{aligned}$$

a) Offensichtlich gilt überall $F_y > 0$, also insbesondere $F_y \neq 0$. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass die Lösungsmenge der Gleichung $F(x,y) = 0$ in einer Umgebung jeder gegebenen Lösung (x_0, y_0) der Graph einer differenzierbaren Funktion $y = \varphi(x)$ ist. Da $F(x,y)$ beliebig oft stetig differenzierbar ist, gilt dasselbe für die Funktion $\varphi(x)$.

b) Die Ableitung der Gleichung $F(x,\varphi(x)) = 0$ nach x liefert mit der Kettenregel

$$F_x(x,\varphi(x)) + F_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0,$$

daraus ergibt sich die Ableitung von $\varphi(x)$

$$\varphi' = -\frac{F_x}{F_y}\ .$$

Die Gleichung $F_x(x,\varphi(x)) + F_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$ leiten wir ein weiteres mal nach x ab, wodurch die zweite Ableitung von y auftaucht. Dazu benützen wir wiederum die Kettenregel:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}\big(F_x(x,\varphi(x))\big) + \frac{d}{dx}\big(F_y(x,\varphi(x))\big)\cdot\varphi'(x) + F_y(x,\varphi(x))\cdot\varphi''(x) \\ &= F_{xx}(x,\varphi(x)) + F_{xy}(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x) + F_{yx}(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x) + F_{yy}(x,\varphi(x))\cdot(\varphi')^2(x) \\ &\quad + F_y(x,\varphi(x))\cdot\varphi''(x) \\ &= F_{xx}(x,\varphi(x)) + 2F_{xy}(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x) + F_{yy}(x,\varphi(x))\cdot(\varphi')^2(x) + F_y(x,\varphi(x))\cdot\varphi''(x)\ . \end{aligned}$$

Schlussendlich setzen wir $\varphi' = -\frac{F_x}{F_y}$ ein und lösen nach φ'' auf:

$$\varphi'' = \frac{-F_{xx}\,F_y^2 + 2\,F_x\,F_{xy}\,F_y - F_x^2\,F_{yy}}{F_y^3}\ .$$

An einem kritischen Punkt von φ muss $\varphi' = 0$ gelten, also $F_x = x - 1 = 0$ und somit $x = 1$. Wegen $F_x = 0$ ist dort die zweite Ableitung

$$\varphi'' = \frac{-F_{xx}\,F_y^2}{F_y^3} = \frac{-F_{xx}}{F_y} = \frac{-1}{\mathrm{e}^y + 1} < 0.$$

Somit liegt an diesem kritischen Punkt ein lokales Maximum von φ vor.

Bemerkung: Der zu $x = 1$ gehörende Wert von y erfüllt die Gleichung

$$F(1,y) = \mathrm{e}^y + y + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = \mathrm{e}^y + y - 1 = 0.$$

Bitte wenden!

Sicher ist $y = 0$ eine Lösung. Sie ist auch die einzige, denn die Funktion $y \mapsto \mathrm{e}^y + y - 1$ hat die Ableitung $\mathrm{e}^y + 1 > 0$, ist also überall streng monoton wachsend, und kann daher höchstens eine Nullstelle auf $\mathbb{R}$ haben.

2. **a)** Es gilt $\nabla g(x, y) = \left(-3x^2, 2y\right)$. Dies kann nur Null sein, wenn $x = y = 0$ ist. Für $c \neq 0$ liegt dieser Punkt nicht auf K. Dann ist K eine überall reguläre Kurve. Für $c = 0$ hingegen ist $(0, 0) \in K$ und K ist regulär ausserhalb von $(0, 0)$.

b) Der Torus T ist die Nullstellenmenge der Funktion

$$t(x, y, z) := \left(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 - 1 \ .$$

Ihr Gradient ist

$$\nabla t(x, y, z) = \left(-\frac{2x\left(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ , -\frac{2y\left(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ , 2z \right) \ .$$

Der Torus ist überall regulär, wo ∇t nicht verschwindet. Ist aber $z = 0$, so folgt $\left(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 1$ und die x- und y-Komponenten von ∇t können nur verschwinden, wenn $x = y = 0$ ist. Aber $(0, 0, 0) \notin T$. Das heisst, T ist eine überall reguläre Fläche.

c) Die Kurve C besteht aus den gemeinsamen Nullstellen der Funktionen

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

und

$$g_2(x, y, z) = x^4 + y^4 - z^3 \ .$$

Deren Gradienten sind

$$\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \ ,$$
$$\nabla g_2(x, y, z) = \left(4x^3, 4y^3, -3z^2\right) \ .$$

Beide verschwinden nicht auf C. Es ist $z^3 = x^4 + y^4 \geq 0$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn $x = y = z = 0$ ist. Jedoch ist $(0, 0, 0) \notin C$. Also ist $z > 0$. Daher haben die z-Komponenten von ∇g_1 und ∇g_2 entgegengesetztes Vorzeichen. Sind ∇g_1 und ∇g_2 linear abhängig, so gibt es demnach ein $\lambda > 0$, so dass $2x = 4\lambda x^3$ ist. Es folgt $x = 0$; genauso ist $y = 0$. Aber $(0, 0, z) \notin C$. Somit ist C überall regulär.

3. Sei S die Fläche im $\mathbb{R}^3$, deren Punkte die Gleichung $z = xy + 1$ erfüllen. Diese Fläche ist die Nullstellenmenge der Funktion

$$g(x, y, z) := z - xy - 1 \ .$$

Die Wurzelfunktion ist streng monoton wachsend. Statt der Abstandsfunktion $|(x, y, z)|$ können wir demnach auch ihr Quadrat, also die Funktion $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$ minimieren.

Da $\nabla g(x, y, z) = (-y, -x, 1)$ nie Null wird, ist S eine überall reguläre Fläche. Also ist jedes globale Minimum ein bedingt kritischer Punkt.

Die kritischen Punkte der Lagrange'schen Hilfsfunktion

$$F(x, y, z) := f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda\,(z - xy - 1)$$

Siehe nächstes Blatt!

sind gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + \lambda y = 0 \ , \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + \lambda x = 0 \ , \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= 2z - \lambda = 0 \ , \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= z - xy - 1 = 0 \ .
\end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich $4xy = \lambda^2 xy$. Also ist entweder $\lambda = \pm 2$ oder $x = 0$ oder $y = 0$. Ist $\lambda = -2$, so folgen $y = x$ und $z = -1$. Setzen wir diese Werte in die vierte Gleichung ein, so erhalten wir $x^2 = -2$, was keine reelle Lösung hat. Ist $\lambda = 2$, so folgen $x = -y$ und $z = 1$. Mit der vierten Gleichung ergibt sich $x = y = 0$. Ist $x = 0$, so ist wegen der vierten Gleichung $z = 1$; daraus folgt $\lambda = 2$, und wiederum $y = 0$. Genauso impliziert $y = 0$ die Gleichung $x = 0$.

Der einzige bedingt kritische Punkt von f auf der Fläche F ist also $(x, y, z) = (0, 0, 1)$. Dort hat f den Wert 1, und der Abstand vom Nullpunkt ist folglich $\sqrt{f(0, 0, 1)} = 1$.

Tatsächlich ist dieser Punkt $(0, 0, 1)$ die gesuchte globale Minimalstelle. Wir schliessen dies aus der folgenden Überlegung: Für jedes $R > 1$ sei B_R die abgeschlossene Kugel mit Radius R um den Ursprung. Dann ist $B_R \cap S$ kompakt und nicht-leer, denn $(0, 0, 1) \in B_R \cap S$. Also nimmt die stetige Funktion f darauf ein Minimum an. Weil f auf dem Rand von B_R den Wert $R^2 > 1 = f(0, 0, 1)$ hat und $(0, 0, 1)$ der einzige kritische Punkt im Inneren ist, wird das Minimum in diesem Punkt angenommen. Da R beliebig war, ist $(0, 0, 1)$ auch die einzige Minimalstelle von $f|_S$.

4. Wir suchen die Maximalstellen der Volumenfunktion

$$f(x, y, z) := xyz$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
g_1(x, y, z) &:= 4x + 4y + 4z - 43.2 = 0 \ , \\
g_2(x, y, z) &:= 2xy + 2xz + 2yz - 43.2 = 0
\end{aligned}$$

und $x, y, z \geq 0$.

Zuerst rechnen wir lokal. Sei C die durch die Gleichungen $g_1 = g_2 = 0$ definierte Teilmenge von $\mathbb{R}^3$. Die Gradienten von g_1 und g_2 sind

$$\begin{aligned}
\nabla g_1(x, y, z) &= (4, 4, 4) \ , \text{ und} \\
\nabla g_2(x, y, z) &= (2\,(y + z)\,, 2\,(x + z)\,, 2\,(x + y)) \ .
\end{aligned}$$

Diese sind genau dann linear abhängig, wenn $x = y = z$ ist. Die Punkte (x, x, x) liegen jedoch nicht auf C, denn die Gleichungen $12x = 43.2$ und $6x^2 = 43.2$ widersprechen einander. Also ist C eine überall reguläre Kurve.

Die Lagrange'sche Hilfsfunktion $F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$ hat einen kritischen Punkt, wenn die folgenden

Gleichungen erfüllt sind.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= yz - 4\lambda_1 - 2\lambda_2\,(y+z) = 0\ , \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= xz - 4\lambda_1 - 2\lambda_2\,(x+z) = 0\ , \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= xy - 4\lambda_1 - 2\lambda_2\,(x+y) = 0\ , \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} &= 4x + 4y + 4z - 43.2 = 0\ , \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} &= 2xy + 2xz + 2yz - 43.2 = 0\ .
\end{aligned}$$

Wir ziehen die erste Gleichung von der zweiten, die zweite von der dritten und die dritte von der ersten ab. Dann ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned}
(y-x)\,(z-2\lambda_2) &= 0\ , \\
(z-y)\,(x-2\lambda_2) &= 0\ , \\
(x-z)\,(y-2\lambda_2) &= 0\ .
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $x = y$ oder $z = 2\lambda_2$ ist. Aus $z = 2\lambda_2$ folgt $x = 2\lambda_2$ oder $y = 2\lambda_2$. In jedem Fall sind mindestens zwei Seitenlängen gleich. Da alles unter Vertauschung der Variablen invariant ist, können wir oBdA $x = y$ annehmen. Dann folgt

$$\begin{aligned}
8x + 4z &= 43.2\ , \\
2x^2 + 4xz &= 43.2\ .
\end{aligned}$$

Durch Eliminieren einer Variablen und Lösen einer quadratischen Gleichung finden wir dafür die Lösungen $x = \frac{6}{5}, z = \frac{42}{5}$ und $x = 6, z = -\frac{6}{5}$. Die zweite davon können wir wegen des negativen Vorzeichens ignorieren. Insgesamt erhalten wir somit den bis auf Symmetrie einzigen relevanten bedingt kritischen Punkt

$$(x, y, z) = \left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{42}{5}\right)\ .$$

An diesem hat f den Wert $\frac{1512}{125}$.

Aus folgender Überlegung schliessen wir, dass wir die gesuchte Maximalstelle gefunden haben. Für $x, y, z \geq 0$ befinden sich wegen $g_1 = 0$ alle Punkte von C im Quader $Q := [0, 10.8]^3$. Der Schnitt $Q \cap C$ ist kompakt. Er ist ausserdem nicht-leer, da die kritischen Punkte in ihm enthalten sind. Die stetige Funktion f nimmt also ihr Maximum auf $Q \cap C$ an. Am Rand $\partial\,(Q \cap C)$ gilt $x = 0$ oder $y = 0$ oder $z = 0$. Daher verschwindet f dort, während an dem gefundenen kritischen Punkt $f(x, y, z) > 0$ gilt. Somit kann sich das Maximum nicht am Rand befinden und an der Maximalstelle muss $f(x, y, z) > 0$ sein.

Das Volumen ist demnach maximal für einen länglichen Quader der Seitenlängen $\frac{6}{5}$, $\frac{6}{5}$ und $\frac{42}{5}$ Latschen. Es beträgt $\frac{1512}{125}$ Kubiklatschen.