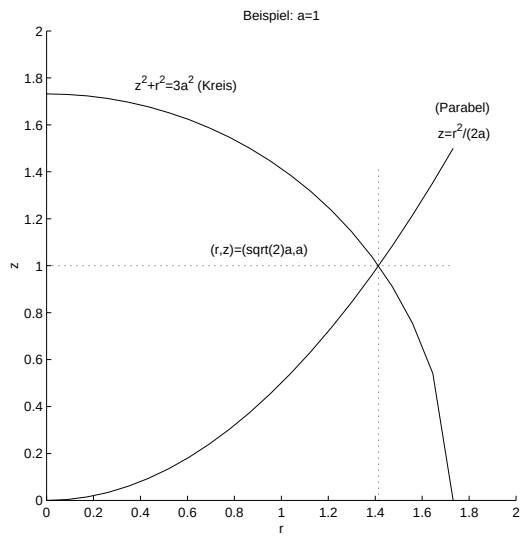
Musterlösung 9

1. Der Integrationsbereich K_a ist rotationssymmetrisch um die z-Achse und entsteht daher durch Drehung eines Durchschnittes mit der halben Koordinatenebene $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 | y = 0 \wedge x \geq 0\}$ um die z-Achse. Dieser Durchschnitt wird begrenzt durch

- die z-Achse,
- die Parabel $x^2 + y^2 = 2az$
  und
- den Kreis $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$.



Der Symmetrie des Problems entsprechend rechnen wir in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \qquad (r > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi)) \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 = r^2. \end{aligned}$$

Die Parabel und der Kreis von oben werden dann durch die Gleichungen

$$r^2 = 2az \quad \text{und} \quad r^2 + z^2 = 3a^2$$

beschrieben. Die Dichte ist $\mu = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2$.

Damit wir die Integrationsgrenzen bestimmen können, benötigen wir den Schnittpunkt von Parabel und Kreis:

$$\begin{aligned} r^2 &= 2az \quad \text{und} \quad r^2 + z^2 = 3a^2 \\ \Rightarrow \qquad 2az + z^2 &= 3a^2 \\ z^2 + 2az - 3a^2 &= 0 \\ z_{1,2} &= -a \pm \sqrt{a^2 + 3a^2} = \begin{cases} -3a \\ a \end{cases} \end{aligned}$$

Die $z = -3a$ Lösung kommt nicht in Frage, da $r^2 = 2az$ dann keine Lösung $r \in \mathbb{R}$ hat. Am Schnittpunkt von Parabel und Kreis gilt also $z = a$ und $r = \sqrt{2az} = \sqrt{2}\,a$.

Sei g die Funktion

$$g\colon [0, \sqrt{3}a] \to \mathbb{R}, z \mapsto \begin{cases} \sqrt{2az}, & \text{für } z \leq a, \\ \sqrt{3a^2 - z^2}, & \text{für } z > a. \end{cases}$$

Dann ist

$$K_a = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0, \sqrt{3}a], \sqrt{x^2 + y^2} \leq g(z) \right\}.$$

Mit einer Formel aus der Vorlesung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{Masse} &= \int_{K_a} \mu \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \, d\mathrm{vol}_3 \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \\
&= \int_0^{\sqrt{3}a} \int_0^{g(z)} \left(z^2 + r^2\right) \cdot 2\pi r dr dz \\
&= 2\pi \int_0^a \int_0^{\sqrt{2az}} (r^3 + z^2 r)\, dr dz + \int_a^{\sqrt{3}\,a} \int_0^{\sqrt{3a^2 - z^2}} (r^3 + z^2 r)\, dr dz = \\
&= 2\pi \left(\int_0^a \left[\frac{1}{4}(r^2 + 2z^2) r^2 \right] \Big|_{r=0}^{\sqrt{2az}} dz + \int_a^{\sqrt{3}\,a} \left[\frac{1}{4}(r^2 + 2z^2) r^2 \right] \Big|_{r=0}^{\sqrt{3a^2 - z^2}} dz \right) \\
&= 2\pi \left(\int_0^a a^2 z^2 + a z^3 \, dz + \frac{1}{4} \int_a^{\sqrt{3}\,a} 9a^4 - z^4 \, dz \right) \\
&= 2\pi \left(\left[\frac{1}{3} a^2 z^3 + \frac{1}{4} a z^4 \right] \Big|_{z=0}^{a} + \frac{1}{4} \left[9a^4 z - \frac{1}{5} z^5 \right] \Big|_{z=a}^{\sqrt{3}\,a} \right) \\
&= 2\pi a^5 \left(-\frac{97}{60} + \frac{9\sqrt{3}}{5} \right).
\end{aligned}$$

2. Wir rechnen beide Aufgabenteile in den üblichen Zylinderkoordinaten, das heisst mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, und $z = z$.

a) Der Abstand des Punkts $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ von der z-Achse ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Das Trägheitsmoment ist also

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} \int_0^{2\pi} \int_0^R \varrho r^2 \cdot r \, dr \, d\phi \, dz &= 2\pi\varrho \int_0^R \int_{-L}^{L} r^3 \, dz \, dr = 4\pi\varrho L \int_0^R r^3 \, dr \\
&= 4\pi\varrho L \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \pi\varrho L R^4
\end{aligned}$$

b) Der Abstand des Punkts $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ von der y-Achse ist $\sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{r^2\cos^2\phi + z^2}$. Das Trägheits-

Siehe nächstes Blatt!

moment ist also

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\int_0^{R} \varrho\left(x^2+z^2\right) r\,dr\,dz\,d\phi &= \varrho\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\int_0^{R}\left(r^3\cos^2\phi + rz^2\right)\,dr\,dz\,d\phi \\
&= \varrho\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left(\frac{R^4}{4}\cos^2\phi+\frac{R^2}{2}z^2\right)\,dz\,d\phi \\
&= \varrho\int_0^{2\pi}\left(\frac{R^4L}{2}\cos^2\phi+\frac{R^2L^3}{3}\right)\,d\phi \\
&= \varrho\int_0^{2\pi}\left(\frac{R^4L}{2}\cdot\frac{\cos(2\phi)+1}{2}+\frac{R^2L^3}{3}\right)\,d\phi \\
&= \varrho\left(\frac{R^4L}{2}\cdot\frac{\sin(2\phi)+2\phi}{4}+\frac{R^2L^3}{3}\cdot\phi\right)\Bigg|_{\phi=0}^{2\pi} \\
&= \varrho\left(\frac{R^4L}{2}\cdot\pi+\frac{R^2L^3}{3}\cdot 2\pi\right) \\
&= \varrho\pi R^2L\left(\frac{R^2}{2}+\frac{2L^2}{3}\right)
\end{aligned}$$

3. **a)** Das Volumen kann als Integral der Flächeninhalte der kreisförmigen Querschnitte

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2\le z^{-2}\}$$

des Rotationskörpers über z von 1 bis $+\infty$ berechnet werden. Hierbei handelt es sich wegen der Integrationsgrenze $+\infty$ um ein *uneigentliches Integral*. Weil der Integrand eine *nichtnegative* Funktion ist, ist das uneigentliche Integral entweder konvergent oder hat den uneigentlichen Grenzwert ∞.

$$\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \int_1^{\infty}\pi z^{-2}\,\mathrm{d}z \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_1^{R}\pi z^{-2}\,\mathrm{d}z \\
&= \lim_{R\to\infty} -\pi z^{-1}\Big|_{z=1}^{R} \\
&= -\pi z^{-1}\Big|_{z=1}^{\infty} \\
&= -\pi\cdot(0-1) \;=\; \pi<\infty\,.
\end{aligned}$$

b) Aus Teil (a) wissen wir, dass das Volumen von R gleich π ist. Aufgrund der konstanten Dichte $\mu=1$ ist damit die Masse ebenfalls $m=\pi$. Die x–Koordinate des Schwerpunkts S ist gegeben durch

$$x_S=\frac{1}{m}\int_R \mu x\,d\mathrm{vol}_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{\pi}\int_R x\,d\mathrm{vol}_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

In Zylinderkoordinaten in der Form $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\r\sin\varphi\\z\end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
x_S &= \frac{1}{\pi}\int_1^{\infty}\int_0^{z^{-1}}\int_0^{2\pi} r\cos\varphi\, r\,d\varphi\,dr\,dz \\
&= 0,
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

da $\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 0$ ist. Analog sieht man, dass $y_S = 0$ ist. Für die z–Koordinate erhalten wir

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \int_0^{z^{-1}} \int_0^{2\pi} z \, r \, d\varphi \, dr \, dz \\ &= \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \int_0^{z^{-1}} 2\pi z r \, dr \, dz \\ &= \int_1^\infty \left(z r^2 \Big|_{r=0}^{z^{-1}} \right) dz \\ &= \int_1^\infty z^{-1} dz. \end{aligned}$$

Da dieses Integral gegen ∞ divergiert, existiert der Schwerpunkt im eigentlichen Sinn nicht. Das heisst, wir können ihn uns unendlich weit weg entlang der z-Achse vorstellen.

c) Der Abstand r_z eines Punktes $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ von der z–Achse ist $r_z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Das Trägheitsmoment von R bzgl. der z–Achse ist damit gegeben durch

$$\Theta_z = \int_R \mu r_z^2 \, d\mathrm{vol}_3 \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \int_R (x^2 + y^2) \, d\mathrm{vol}_3 \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right).$$

Wieder unter Verwendung von Zylinderkoordinaten $\left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ r \\ z \end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir wegen $x^2 + y^2 = r^2$

$$\begin{aligned} \Theta_z &= \int_1^\infty \int_0^{z^{-1}} \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r \, d\varphi \, dr \, dz \\ &= 2\pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{4} r^4 \Big|_{r=0}^{z^{-1}} \right) dz \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty z^{-4} \, dz \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) r^{-3} \Big|_{r=1}^{\infty} \\ &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$