Probeprüfung

Allgemeine Hinweise:

- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben sorgfältig durch. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Rechenschritte und begründen Sie die Resultate.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Schreiben Sie auf *alle* abzugebenden Blätter Ihren Namen, füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus und notieren Sie dort Ihre Leginummer.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss *alle* Blätter aufsteigend nach Aufgaben geordnet abzugeben.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 10 A4-Seiten (5 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt;
- *keine* sonstige Literatur;
- *kein* Taschenrechner;
- *kein* Mobiltelephon.

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

1. Bestimmen Sie alle periodischen Lösungen der Differentialgleichung

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = \sin x.$$

(8 Punkte)

2. **a)** Skizzieren Sie die Menge

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \; 9x^4 - 16x^2y^2 + 9y^4 \leq 9 \right\}$$

und zeigen Sie, dass sie beschränkt ist. (2 Punkte)

b) An welchen Punkten ist die Randkurve von M regulär? (2 Punkte)

c) Hat die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ ein Minimum und ein Maximum auf M? Wenn ja, bestimmen Sie diese. (6 Punkte)

3. Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x, y) = x^2y^2$ über den Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$, der durch die Geraden

$$y = \frac{x}{9}, \quad y = \frac{x}{4}$$

und die Kurven

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{4}{x}$$

beschränkt wird. (8 Punkte)

4. Berechnen Sie mit dem Satz von Gauss den Fluss des Vektorfeldes

$$V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x^2yz, xy^2z, z)$$

vom Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ aus gesehen durch die Fläche

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = z, 0 \leq z \leq 1 \right\}.$$

(9 Punkte)