Serie 1

Separierbare Differentialgleichungen

1. Bestimmen Sie die Lösungen $y(x)$ der folgenden separierbaren Differentialgleichungen:

a) $y' = \dfrac{y-2}{x-1}$, **b)** $y' = e^{x+y}$.

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y' = \frac{2x^3 + y^3}{3xy^2}\ .$$

Potenzreihenlösungen

3. Betrachten Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y'(x) = 2xy(x), \quad y(0) = 1.$$

Verwenden Sie für die Lösung folgenden Potenzreihenansatz:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_n und leiten Sie daraus eine Darstellung von $y(x)$ als elementare Funktion her.

Lineare Differentialgleichungen

4. Sei I ein Intervall und

$$Ly(x) = b(x)$$

eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung für eine Funktion y auf I. Zeigen Sie folgende Aussagen aus der Vorlesung.

a) Die Lösungen der homogenenen Gleichung ($b = 0$) bilden einen Vektorraum.

b) Für jede auf I definierte Lösung y_p der inhomogenen Gleichung und jede auf I definierte n-mal differenzierbare Funktion y_h ist $y_p + y_h$ genau dann eine Lösung von $Ly = b$, wenn y_h eine Lösung der homogenen Gleichung ist.

Bitte wenden!

c) Ist y_j eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $Ly = b_j$ für jedes j, so ist $y_1 + \ldots y_r$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $Ly = b_1 + \ldots + b_r$.

Multiple-Choice-Aufgaben

5. 1. Betrachten Sie die folgende implizite gewöhnliche Differentialgleichung:

$$(1 + y')^{3/2} - |\sin y| = 0.$$

Welches ist die Menge der Anfangswerte, für die der Existenz- und Eindeutigkeitssatz *nicht* die lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Gleichung garantiert?

(a) $\{y \in \mathbb{R} \,:\, \sin y = -1\}$.

(b) $\{y \in \mathbb{R} \,:\, \sin y = 0\}$.

(c) $\{y \in \mathbb{R} \,:\, \sin y = 1\}$.

(d) Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz ist überall anwendbar.

2. Was ist eine maximale Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung?

(a) Eine Lösung, die den grössten Absolutbetrag hat.

(b) Eine Lösung, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

(c) Eine Lösung mit maximalem Definitionsintervall.

(d) Eine Lösung, die alle anderen Lösungen enthält.

(e) Eine Lösung, die maximal oft differenzierbar ist.

3. Welche der folgenden Differentialgleichungen ist **nicht** separierbar?

(a)

$$y' = \frac{3x^2 - e^x}{2y - 7}$$

(b)

$$(x + 3)(x - 2)\, y' = x + xy^2$$

(c)

$$y' = y + x$$

(d)

$$y' = 2 - xy + x - 2y$$

Siehe nächstes Blatt!

Organisatorische Informationen

- **Übungsserien.** Die Übungsserien werden jeweils Freitags online veröffentlicht. Die in der Woche n ausgeteilte Serie wird in den Übungen der Woche $n + 1$ vorbesprochen und am Montag der Woche $n + 2$ im Fach der Assistenten im HG F 28 abgegeben.
- **Online-Serien.** Zusätzlich zu den gedruckten Übungsaufgaben wird es weiterhin jede Woche eine Online-Serie mit Multiple-Choice-Aufgaben geben. Die Aufgaben werden freitags veröffentlicht und können bis Sonntag Abend online bearbeitet werden. Alle weiteren Informationen dazu erhalten Sie per Email.
- **Sprechstunden.** Die Übungsleiter bieten zusätzlich zu den Übungen jeden Donnerstag von 12 bis 13 Uhr eine Sprechstunde im Raum HG G 19.2 an, die insbesondere zur Beantwortung von Fragen zu den individuellen Bearbeitungen der Übungsserien gedacht ist.

Bei Fragen zum Übungsbetrieb wenden Sie sich bitte an Martin Sack (`martin.sack@math.ethz.ch`), bei Fragen zu einzelnen Aufgaben an Ihren Hilfsassistenten. Informationen zur Vorlesung und zu den Übungen sowie die Übungsserien und deren Musterlösungen finden Sie unter

http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2014/other/a2_itet/