Serie 13

Operationen auf Vektor- und Skalarfeldern

1. Formulieren und beweisen Sie koordinatenfreie Identitäten im $\mathbb{R}^3$ der Form

$$\operatorname{rot}(fK) = (\nabla f) \times K + f \cdot \operatorname{rot} K.$$

a) $\operatorname{div}(fK) = \ \ldots$

b) $\operatorname{div}(K \times L) = \ \ldots$

c) $\operatorname{rot}(\nabla f) = \ \ldots$

d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} K) = \ \ldots$

e) $\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{rot} K) = \ \ldots$

Integralsätze im $\mathbb{R}^3$

2. Gegeben seien der Vektor $a = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und die Funktion

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \tfrac{1}{6}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$v = \nabla f + a \times \nabla f.$$

a) Berechnen Sie $\operatorname{div} v$.

b) Berechnen Sie den Fluss von v durch die Oberfläche der Einheitskugel um den Ursprung.

c) Berechnen Sie die Rotation von $\operatorname{rot} v$.

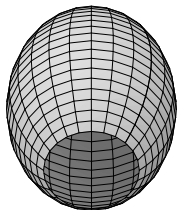
d) Berechnen Sie die Zirkulation von v entlang des Einheitskreises um den Ursprung in der Normalebene zu a.

3. Ein Heissluftballon habe die Form einer Sphärenkappe mit Radius $R > 0$ und Öffnungsdurchmesser $0 < d < 2R$:

Durch die poröse Oberfläche B dringt das im Inneren enthaltene Gas mit der Geschwindigkeit $v = \operatorname{rot} \mathbf{F}$ nach aussen, wobei

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!



ist. Berechnen Sie den Fluss $\int\limits_B v \cdot d\omega$ durch die Ballonoberfläche B.

4. Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld

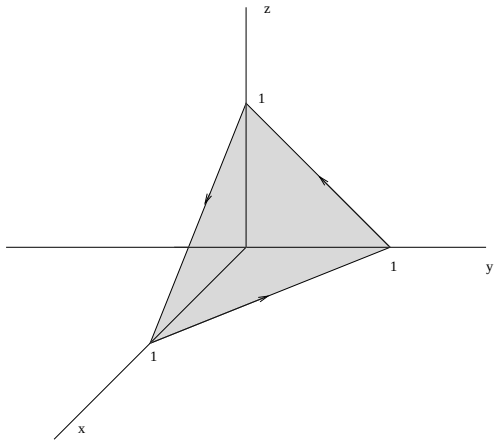
$$V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -yz^2 \\ -y^2 z \end{pmatrix}$$

und die Menge $S = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0 \}$.

5. Berechnen Sie die Zirkulation $\int_\gamma K \cdot dr$ für das Vektorfeld

$$K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ y - z + x \\ z - x + y \end{pmatrix}$$

und den in der Abbildung dargestellten Weg γ



a) direkt.

b) mit Hilfe des Satzes von Stokes und einer Parameterdarstellung der Dreiecksfläche.

Hinweis: Die Gesamtsituation ist symmetrisch bezüglich zyklischer Vertauschung $x \to y \to z \to x$.

Siehe nächstes Blatt!

Multiple-Choice-Aufgaben

1. Welcher der folgenden Vektoren ist ein nach aussen gerichteter Normalenvektor (nicht notwendigerweise normiert) auf dem Rand des Ellipsoids

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} ?$$

(a) $\begin{pmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \\ 2z/c^2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2x/a^2 \\ -2y/b^2 \\ -2z/c^2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} yz(1/b^2 - 1/c^2) \\ xz(1/c^2 - 1/a^2) \\ xy(1/a^2 - 1/b^2) \end{pmatrix}$

Bitte wenden!

2. Seien

$$p_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } p_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$K(x) := \frac{c_1\,(x - p_1)}{|x - p_1|^3} + \frac{c_2\,(x - p_2)}{|x - p_2|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{p_1, p_2\}\,.$$

Welchen Wert hat sein Flächenintegral über die Oberfläche des Würfels $[-a, a]^3$ für $a > 1$?

(a) 0

(b) $4\pi(c_1 + c_2)$

(c) $4\pi(c_1 + c_2)a^2$

(d) $8(c_1 + c_2)a^3$

(e) $4\pi(c_1 - c_2)$

3. Sei K ein C^1-Vektorfeld auf $B \subset \mathbb{R}^3$. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

(a) Für eine Fläche $F \subset B$ misst das vektorielle Flächenintegral $\int_F K(x) \cdot d\omega$ den Fluss von K durch F in Richtung des gewählten Normalenvektors.

(b) Falls $\operatorname{div} K = 0$ ist, verschwindet der Fluss von K durch jede Fläche $F \subset B$.

(c) Der Fluss von K durch die Randfläche von B ist die totale Produktionsrate von K im Innern.

(d) Die Divergenz eines Vektorfelds misst die lokale Produktionsrate in jedem Punkt.