Serie 3

Lineare Differentialgleichungen

1. Bestimmen Sie die allgemeine komplexe Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen:

a) $y''(x) + (2-3i)y'(x) - 6iy(x) = 0$,

b) $y'''(x) + iy''(x) + 2y' = 0$.

2. Bestimmen Sie die Lösung $y(t) : [0,1] \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y = e^x \ ,$$

die die Randbedingungen $y(0) = \frac{1}{2}(1-e^2)$ und $y(1) = 0$ erfüllt.

Systeme von Differentialgleichungen, Erhaltungssätze

3. In einem festen Gebiet leben zu jeder Zeit t eine Population Beutetiere mit $x = x(t)$ Individuen und eine Population Raubtiere mit $y = y(t)$ Individuen. Die Entwicklung des Tierbestands wird durch folgende Grössen bestimmt:

$$\begin{aligned} a &= \text{Vermehrungsrate der Beutetiere bei Abwesenheit der Raubtiere,} \\ b &= \text{Todesrate der Beutetiere durch Gefressenwerden,} \\ c &= \text{Vermehrungsrate der Raubtiere durch Fortpflanzung,} \\ d &= \text{Todesrate der Raubtiere bei Abwesenheit der Beutetiere.} \end{aligned}$$

Diese seien alle konstant und positiv. Ein kontinuierliches Modell für die Populationgrössen ist das folgende System gekoppelter Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a-by)x \\ \dot{y} &= (cx-d)y. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$E : \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto a\log y - by - cx + d\log x,$$

eine Erhaltungsgrösse, d.h. auf jeder Lösungskurve konstant ist.

b) Folgern Sie daraus, dass alle Lösungen des Systems für beliebige positive Zeiten existieren.

Bitte wenden!

4. In der Vorlesung haben Sie die Lösung des Zweikörperproblems in drei Dimensionen gesehen. Wir betrachten hier den freien Fall in einer Dimension. Nehmen wir an, eine Rakete starte senkrecht zur Erdoberfläche. Ihr Abstand vom Erdmittelpunkt sei eine zweimal differenzierbare Funktion $x > 0$ der Zeit t mit stetigen Ableitungen. Zur Zeit $t = 0$ seien

$$x(0) = x_0 > 0 \,, \qquad \dot{x}(0) = v_0 > 0 \,.$$

Nachdem das Triebwerk ausgebrannt ist, bewegt sich die Rakete nur noch gemäss dem Newtonschen Gravitationsgesetz. In geeigneten Masseinheiten erfüllt die Funktion x dann die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{1}{x^2} \,.$$

a) Zeigen Sie, dass für Lösungen der Differentialgleichung die Energie E konstant bleibt, wobei

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{x} \,.$$

b) Für $E \geq 0$ verlässt die Rakete das Schwerefeld der Erde, d.h. $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$.

c) Zeigen Sie, dass für $E < 0$ die Rakete in endlicher Zeit auf die Erde stürzt, genauer $\lim_{t\to T} x(t) = 0$ für die maximale Lösung auf $[0, T[$ ist.

Hinweis: Sie müssen keine explizite Lösung $x(t)$ angeben, um die Teile b) und c) zu lösen.

Partielle Ableitungen

5. Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktionen:

a) $f(x, y) = x$,

b) $f(x, y) = e^{xy}$,

c) $f(x, y) = x^y$,

d) $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$,

e) $f(x, y) = x^2 y \sin(xy)$,

f) $f(x, y, z) = xy^2z^3$.

Siehe nächstes Blatt!

Multiple-Choice-Aufgaben

1. Für jeden Parameter $c \in \mathbb{R}$ betrachte die Kurve $y = cx^2$ für $x > 0$. Welche Differentialgleichung beschreibt die Kurven, welche die gegebenen überall senkrecht schneiden (Orthogonaltrajektorien)?

(a) $y' = -\frac{x}{2y}$

(b) $y' = \frac{x}{2y}$

(c) $y' = \frac{2y}{x}$

(d) $y' = -\frac{2y}{x}$

2. Welche geometrische Gestalt nehmen die Lösungen der Differentialgleichung aus der vorherigen Aufgabe an, also welche Kurven schneiden die Kurven $y = cx^2$ orthogonal?

(a) Hyperbeln

(b) Kreise

(c) Ellipsen

(d) Parabeln

Bitte wenden!

3. Welche der folgenden Differentialgleichungen hat eine Lösung, die für $x \to \infty$ beschränkt bleibt?

(a) $y'' + y' = 1$

(b) $y'' - y' = 1$

(c) $y'' + y = 1$

(d) $y'' - y = x$

(e) alle

(f) hängt vom Anfangswert ab

4. Welche Aussage ist wahr über die Lösungen der folgenden Differentialgleichung?

$$\ddot{x} = -x + x^3$$

(a) $\dot{x}^2 + x^2 - \frac{1}{2}x^4$ ist streng monoton wachsend

(b) $\dot{x}^2 + x^2 - \frac{1}{2}x^4$ ist streng monoton fallend

(c) $\dot{x}^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^4$ ist konstant

(d) $\dot{x}^2 + x^2 - \frac{1}{2}x^4$ ist konstant