Serie 7

Vektorwertige Funktionen, invertierbare Funktionen

1. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\ \cos\vartheta\cos\varphi \\ r\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ r\ \sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

a) Erklären Sie die Bedeutung von f und beschreiben Sie das Bild für festes r.

b) Berechnen Sie die Funktionalmatrix von f.

c) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante.

d) In welchen Punkten ist f lokal invertierbar?

Kettenregel

2. Sei

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 \right\}.$$

Betrachten Sie die Punktprojektion vom Punkt $N := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ auf die x-y-Ebene, das heisst die Abbildung, welche einen Punkt $\xi \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus Z$ auf den Schnittpunkt der x-y-Ebene mit der Geraden durch N und ξ abbildet.

a) Gib eine Formel an für die entsprechende Funktion $g : \mathbb{R}^3 \smallsetminus Z \to \mathbb{R}^2$?

b) Berechnen Sie mithilfe der Kettenregel die Funktionalmatrix von $g \circ f$, wobei f die Abbildung aus Aufgabe 1 ist.

c) Wo ist $g \circ f$ regulär?

Bitte wenden!

Mehrdimensionales Riemann-Integral

3. **a)** Berechnen Sie das folgende Doppelintegral:

$$\int_0^1 \int_0^x e^{x+y}\, dy\, dx.$$

Berechnen Sie das Integral dann noch einmal nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge und Anpassung der Integrationsgrenzen nach dem Satz von Fubini.

b) Bei dem folgenden Integral ist die Integrationsreihenfolge umzukehren, d.h. die innere Variable soll zur äusseren werden. Wie lautet das neue Integral?

$$\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\, dx\, dy.$$

c) Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int_G (x^2+y)\; d\,\mathrm{vol}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right),$$

wobei G das von den Parabeln $x = y^2$ und $y = x^2$ begrenzte Gebiet ist.

4. Berechnen Sie durch Dreifachintegration das Volumen des Körpers im $\mathbb{R}^3$, der von den Paraboloiden $z = x^2 + y^2$ und $z = x^2 + 2y^2$ sowie den Ebenen $y = x$, $y = 2x$ und $x = 1$ begrenzt wird.

Siehe nächstes Blatt!

Multiple-Choice-Aufgaben

1. Für welche Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stimmen Jacobi- und Hessematrix überein?

(a) Nur für die Identität.

(b) Für konstante Funktionen.

(c) Für jede Funktion der Form $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = A + Be^{x+y}$.

(d) Für keine.

Bitte wenden!

2. Sei

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^r$$

eine differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $r < n$. Sei weiterhin

$$B := \{x \in U \mid g_1(x) = \ldots = g_r(x) = 0\}\,.$$

Welche Aussage ist richtig?

(a) Jeder reguläre Punkt von B ist ein kritischer Punkt von g.

(b) Jeder kritische Punkt von B ist ein kritischer Punkt von g.

(c) Jeder reguläre Punkt von B ist ein regulärer Punkt von g.

(d) Jeder kritische Punkt von B ist ein regulärer Punkt von g.

(e) Keine der Aussagen ist richtig.

Siehe nächstes Blatt!

3. Für welchen Definitionsbereich D ist die Polarkoordinatenabbildung

$$f\colon D \to f(D) \subset \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

invertierbar?

(a) $D = [0,1] \times [0, 2\pi]$

(b) $D = [0,1] \times [0, 2\pi[$

(c) $D =]0,1] \times [0, 2\pi[$

(d) $D =]0,1] \times [0, 2\pi]$

(e) Für keinen der angegebenen Bereiche

4. Welche Funktion gibt den Winkel der Polarkoordinatenabbildung auf dem Definitionsbereich $]0,\infty[\times]0,\pi[$ zurück?

(a) $\arctan \frac{x}{y} + \frac{\pi}{2}$

(b) $-\arctan \frac{x}{y} + \frac{\pi}{2}$

(c) $\arctan \frac{x}{y}$

(d) $\arctan \frac{y}{x}$

Bitte wenden!

5. Wo ist die folgende Funktion lokal invertierbar?

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \cosh v \\ u \sinh v \end{pmatrix}$$

(a) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(b) $[0, \infty[\times [0, \infty[$

(c) $]0, \infty[\times]0, \infty[$

(d) $(\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}) \times \mathbb{R}$