Serie 9

Physikalische Grössen

1. Betrachten Sie für $a > 0$ den Körper K_a, der vom Paraboloid $x^2 + y^2 = 2az$ und von der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ begrenzt wird und den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3}a \end{pmatrix}$ enthält, und dessen Dichte durch $\mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := x^2 + y^2 + z^2$ gegeben ist. Berechnen Sie die Masse von K_a.

2. Berechnen Sie das Trägheitsmoment des durch die Ungleichungen $x^2 + y^2 \leq R^2$ und $|z| \leq L$ definierten Zylinders mit der konstanten Massendichte ϱ

a) bzgl. der z–Achse,

b) bzgl. der y–Achse.

Uneigentliche Integrale

3. Betrachten Sie den unbeschränkten Rotationskörper R mit konstanter Dichte $\mu = 1$, der durch die Ungleichungen

$$x^2 + y^2 \leq z^{-2} \quad \text{und} \quad z \geq 1$$

definiert wird.

a) Berechnen Sie das Volumen von R.

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt von R.

c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment von R bzgl. der z–Achse.

Bemerkung: Die Resultate sind zum Teil nicht endlich.

Bitte wenden!

Multiple-Choice-Aufgaben

1. Für jede differenzierbare Funktion f und jede Zahl $R > 0$ gilt

$$\int_{x^2+y^2 \leq R^2} f'(x^2+y^2)\, d\mathrm{vol}_2 \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \;=\; \ldots$$

(a) $\pi \cdot \big(f(R^2) - f(0)\big)$

(b) $\pi f(R^2)$

(c) $\pi \cdot (f(R) - f(0))$

(d) $2\pi \cdot \big(f(R^2) - f(0)\big)$

(e) $\int_0^{R^2} f'(x^2+y^2) \cdot 2\pi r \, dr$

(f) $\pi \cdot \big(f(R^2) - f(0)\big)$

Siehe nächstes Blatt!

2. Das Trägheitsmoment einer dünnen Kugelschale mit konstanter Dichte, Dicke ϵ und äusserem Radius R ist in etwa proportional zu

(a) $R^2\epsilon^3$.

(b) $R^3\epsilon^2$.

(c) $R^4\epsilon$.

(d) $R^{9/2}\epsilon^{1/2}$.

(e) R^5.

3. Gegeben sei ein Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ mit konstanter Dichte 1. Um welchen Faktor ändert sich das Trägheitsmoment bzgl. der z–Achse, wenn K in x– und y–Richtung jeweils um den Faktor $a > 0$, und in z–Richtung um den Faktor $b > 0$ gestreckt wird (und die Dichte weiterhin gleich 1 ist)?

(a) a^2b

(b) a^2b^2

(c) a^4b

(d) a^3b^2

(e) ab^4

Bitte wenden!

4. Das Departement für Geologie der Technischen Hochschule von Absurdistan (ATH) hat ein schnurgerades senkrechtes Loch bis zum Erdmittelpunkt gegraben. Welcher Differentialgleichung, für eine entsprechende Wahl von $C > 0$, unterliegt ein in diesem Loch hinunterfallender Stein, wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt und die Erde als homogene Kugel annimmt?

(a) $\ddot{x} = -\frac{C}{x^2}$

(b) $\ddot{x} = \frac{C}{x^2}$

(c) $\ddot{x} = -\frac{C}{x}$

(d) $\ddot{x} = -C$

(e) $\ddot{x} = -Cx$

(f) $\ddot{x} = -Cx^2$

5. Das unbestimmte Integral $\int e^{-x^2}\, dx$ ist ...

(a) $e^{-x^2} + C$

(b) $-e^{-x^2} + C$

(c) $-\frac{1}{2x} e^{-x^2} + C$

(d) keine elementare Funktion

(e) existiert nicht