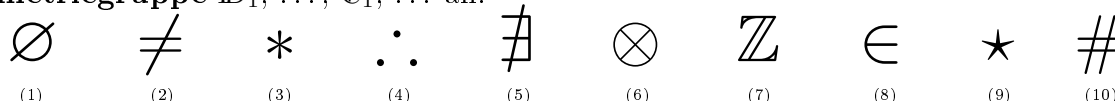


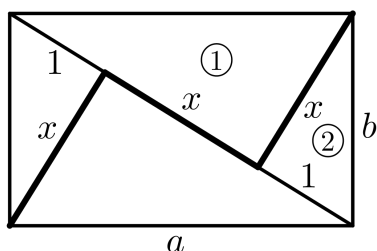
Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!** Zeit: 3 Std.
Erlaubte Hilfsmittel: Skript mit Notizen, Übungen u. alte Prüfungen mit Lösungen, elementarer Taschenrechner
 Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben vollständig lösen.

1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)

(a) Geben Sie zu den abgebildeten mathematischen Symbolen $1, \dots, 10$ die jeweilige **Symmetriegruppe** $\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{C}_1, \dots$ an.

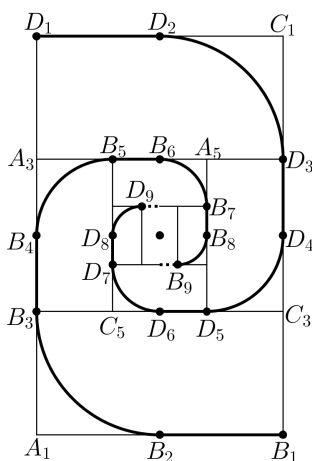


(b) Das abgebildete **Rechteck** wird durch die eingezeichneten Strecken in 4 rechtwinklige Dreiecke unterteilt. Dreieck ① ist eine massstäbliche Vergrößerung von Dreieck ②. Berechnen Sie x und das Seitenverhältnis $a : b$ des Rechtecks.



Figur 1 (Aufgabe 1b)

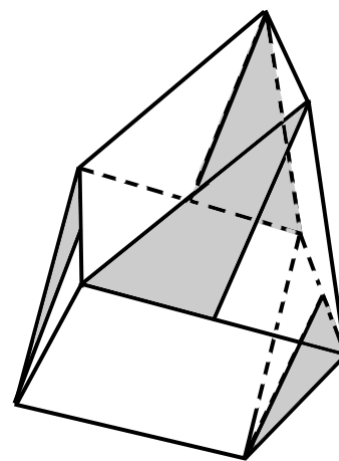
(c) Figur 2 zeigt eine „**Doppelspirale**“, deren beiden Spiralarme je abwechselungsweise aus Rechteckseitenhälften und Viertelkreisbogen bestehen und bis in die Rechteckmitte führen. Dabei sind die Rechtecke $A_1B_1C_1D_1, A_3B_3C_3D_3$ usw. Goldene Rechtecke. Berechnen Sie die Länge der Doppelspirale in Abhängigkeit der Länge $a = |A_1B_1|$. (Die Endlichkeit der Länge sei vorausgesetzt.)



Figur 2 (Aufgabe 1c)

(d) Welche Aussagen über **endliche, ebene Figuren** sind richtig, welche falsch? Begründen Sie die Richtigkeit der Aussage oder skizzieren Sie ein Gegenbeispiel (widersprechendes Beispiel).

- ① Eine achsensymmetrische Figur ist *nie* drehsymmetrisch.
- ② Eine achsensymmetrische Figur mit mehreren Symmetrieachsen ist *immer* drehsymmetrisch.
- ③ Eine drehsymmetrische Figur ist *immer* punktsymmetrisch.

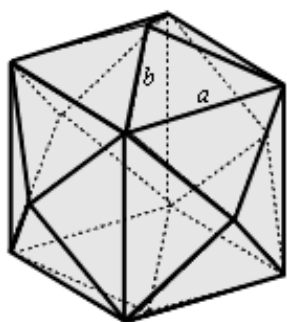


Figur 3 (Aufgabe 2)

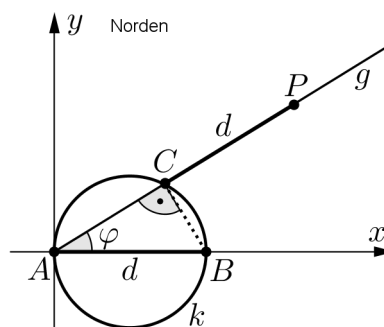
2. [10P.] Bezeichne Ω den **verdrehten Doppelkeil** (Figur 3). Die 4 dreieckigen Seitenflächen sind gleichseitig und stehen senkrecht zur quadratischen Mittelfläche. Die Färbung ist zu berücksichtigen!

- (a) Begründen Sie kurz, dass Ω höchstens vier Symmetrietransformationen besitzen kann.
- (b) Ermitteln Sie $\text{Symm}(\Omega)$, d.h. finden Sie alle vier Symmetrietransformationen von Ω . („Typ“ gemäss Liste im Skript auf S. 96 und zugehörige bestimmende Elemente angeben/beschreiben)
- (c) Stellen Sie die zu $\text{Symm}(\Omega)$ zugehörige Gruppentafel auf.
- (d) Welche Symmetrietransformationen umfasst die Symmetriegruppe des Körpers zusätzlich, wenn die Färbung *ignoriert* wird?
- (e) Ist $\text{Symm}(\Omega)$ eine Untergruppe der Symmetriegruppe des Würfels?

3. [11P.] Auf die Flächen eines Würfels der Kantenlänge a werden quadratische Pyramiden mit der Seitenlänge $b = \frac{3}{4}a$ aufgesetzt, so dass ein Polyeder entsteht, welches durch lauter gleichschenklige Dreiecke begrenzt wird, das **Tetrakishexaeder** (Figur 4).
- Berechnen Sie die Höhe h der aufgesetzten Pyramiden. (Lösung: $h = \frac{a}{4}$)
 - Das Tetrakishexaeder stehe mit einer Ecke ausbalanciert auf der Grundrissebene (siehe Figur 4). Skizzieren Sie die Ansicht von oben (d.h. den Grundriss).
 - Wie gross sind Volumen und Oberfläche des Tetrakishexaeders (ausgedrückt durch a)?
 - Überprüfen Sie die Eulersche Polyederformel für das Tetrakishexaeder.
 - Das Tetrakishexaeder besitzt eine Inkugel. Berechnen Sie den Inkugelradius r . (Tipp: Vergleichen Sie ein rechtwinkliges Dreieck, welches r enthält, mit einem massstäblich verkleinerten Dreieck, welches s enthält.)



Figur 4 (Aufgabe 3)



Figur 5 (Aufgabe 4)

4. [9P.] Im Kreis k mit Durchmesser $d = |AB|$ wird durch A eine Gerade g mit Neigungswinkel φ gezogen; g schneidet k in C (Figur 5). Von C aus wird auf g der Durchmesser d in „Richtung Norden“ abgetragen; dies ergibt P . Wird φ verändert, überstreicht P die Kurve γ . (Im Fall $\varphi = 0^\circ$ wird der Durchmesser d „nach Osten“ abgetragen, im Fall $\varphi = 180^\circ$ „nach Westen“.)
- Skizzieren Sie γ ($d = 2$ cm) mithilfe der Punkte P zu $\varphi: 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$.
 - Wie lautet eine Parameterdarstellung von γ ? (Bestimmen Sie dazu die Koordinaten x und y von P als Funktionen von φ ($0 \leq \varphi \leq 180^\circ$)).
 - Zeigen Sie, dass γ auch durch die Parameterdarstellung $t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} d(t+t^2) \\ d(1+t)\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$ beschrieben wird. (Tipp: Setzen Sie in Teilaufgabe (b) $t = \cos \varphi$ mit $-1 \leq t \leq 1$)
 - Für welchen Parameterwert t liegt der Punkt P am weitesten links? Wie gross ist dann der x -Wert von P ?

5. [10P.] Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S: (\varphi, t) \mapsto \vec{r}(\varphi, t) := \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ \sin t \cos \varphi \\ \sin t \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq t < 2\pi)$$

- Skizzieren Sie in einem räuml. Koordinatensystem die Fläche S durch ein angedeutetes Netz von φ - und t -Linien. Was für Kurven sind die φ -Linien und die t -Linie zu $\varphi = 0$?
- Ist S eine Regelfläche? (Kurze Begründung ohne Rechnung)
- Zeigen Sie, dass die Koordinatengleichung der Fläche durch $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$ gegeben ist.
- Berechnen Sie einen Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}(\varphi_0, t_0)$.