ETHZ D-ARCH
Studiengang
Architektur

Basisprüfung

Mathematisches Denken I & II

Sommer 2013
Dozent
Dr. M. Leupp

Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!** Zeit: 3 Std.

Erlaubte Hilfsmittel: Skript mit Notizen, Übungen u. alte Prüfungen mit Lösungen, elementarer Taschenrechner

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben vollständig lösen.

1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)

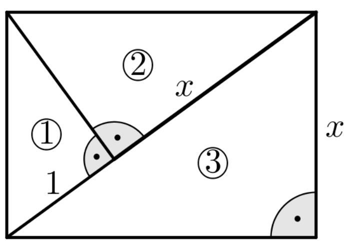
   (a) Geben Sie zu den abgebildeten Auto Logos $1, \ldots, 10$ die jeweilige **Symmetriegruppe** $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{C}_1, \ldots$ an. (Ignorieren Sie kleine Bildfehler oder Unregelmässigkeiten im Farbton!)

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10)

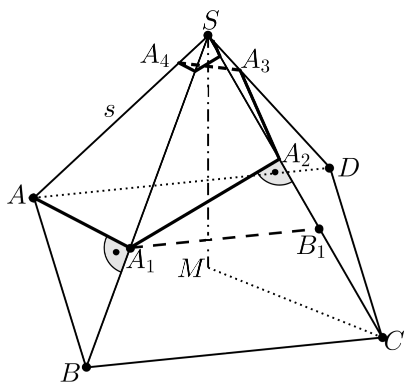
   (b) Das **Drei-Dreiecke-Tangram** von Georg Brügner besteht aus drei rechtwinkligen Dreiecken, die ein Rechteck bilden. Dabei sind die mit x beschrifteten Seiten gleich lang. Berechnen Sie x und das Flächenverhältnis vom Dreieck ② zum Dreieck ①.

   (c) Figur 2 zeigt eine (gerade) quadratische **Pyramide** mit Seitenkantenlänge $s = |SA|$ und mit $|SA_1| = 0.8\,s$, d.h. das Dreieck A_1B_1S ist eine massstäbliche Verkleinerung des gleichschenkligen Dreiecks ABS. Berechnen Sie die Länge des spiralförmigen Weges $AA_1A_2A_3A_4\ldots$ ausgedrückt durch s. (Der Weg windet sich unendlich oft um die Pyramide und trifft dabei stets senkrecht auf die nächste Kante. Die Endlichkeit seiner Länge sei vorausgesetzt.)

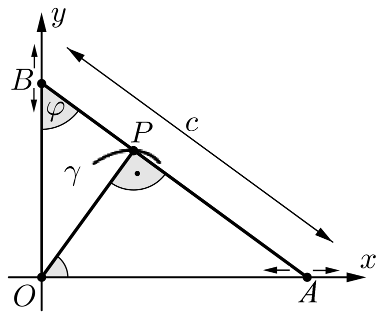
   (d) Die Strecke AB mit der festen Länge c gleitet mit ihren Enden A, B den Koordinatenachsen entlang (Figur 3). Vom Ursprung O aus wird das Lot auf die Strecke AB gefällt. Benutzen Sie den Parameter φ $(0 \leq \varphi \leq 90°)$ und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Bahnkurve γ des Lotfusspunktes P. (Tipp: Bestimmen Sie die Länge $|OP|$ und damit die Koordinaten x und y von P als Funktionen von φ.)



Figur 1 (Aufgabe 1b)



Figur 2 (Aufgabe 1c)



Figur 3 (Aufgabe 1d)

2. [8P.] Im Folgenden werden **konvexe Polyeder** betrachtet, die aus x kongruenten Quadraten und zwei regulären n-Ecken aufgebaut sind und die nur 3-kantige Ecken (d.h. in jeder Ecke stossen 3 Kanten zusammen) besitzen.

   (a) Skizzieren Sie einen solchen Körper bestehend aus drei Quadraten und zwei Dreiecken.
   (b) Welcher reguläre Körper kann als solches Polyeder aufgefasst werden? (Kurze Begründung)
   (c) Gibt es zu jeder Anzahl x $(x \geq 3)$ ein solches Polyeder? (Kurze Begründung)
   (d) Bestimmen Sie mit Hilfe von der Eulerschen Polyederformel eine Bedingung zwischen x und n.

3. [10P.] Von einer ebenen Figur Ω ist bekannt, dass sie die **Symmetriegruppe** $\mathrm{Symm}(\Omega) = \{I, X, Y, Z\}$ besitzt und dass für die Symmetrietransformation X gilt: $X \circ X \circ X = Z$.

   (a) Stellen Sie die zu $\mathrm{Symm}(\Omega)$ zugehörige Gruppentafel (vgl. Figur 4) auf.

   (b) Es ist $X = X$ und $Z = X \circ X \circ X$. Geben Sie, falls möglich, auch von I und Y an, wie sie durch Verketten von X erzeugt werden können.

   (c) Skizzieren Sie eine ebene Figur Ω_1, die die obige Symmetriegruppe besitzt. Führen Sie geeignete Bezeichnungen ein und geben Sie alle möglichen 'Lösungen' für X, Y, Z an.

   (d) Die räumlichen Entsprechungen von I, X, Y, Z bilden ebenfalls eine Symmetriegruppe. Skizzieren Sie eine räumliche Figur mit genau diesen (und keinen weiteren) Symmetrien.

   (e) Welches ist die nächst grössere Symmetriegruppe, von der $\mathrm{Symm}(\Omega)$ eine Untergruppe ist? (Falls es mehr als eine Lösung gibt, alle angeben.)

4. [10P.] Figur 5 zeigt ein **reguläres Oktaeder** (Kantenlänge a) und seinen umbeschriebenen Würfel. Die Oktaederecken sind Flächenmitten des Würfels. Auf zwei einander gegenüberliegende, parallele Oktaederflächen werden Pyramiden mit den Würfelecken als Spitze aufgesetzt. Dadurch entsteht das **Polyeder** P begrenzt durch lauter Vierecke, z. B. $ABCD$.

   (a) Was für eine Figur ist das Viereck $ABCD$ (Seitenlängen und Innenwinkel angeben)?

   (b) Der Würfel stehe auf der Grundrissebene. Skizzieren Sie das Polyeder P von oben.

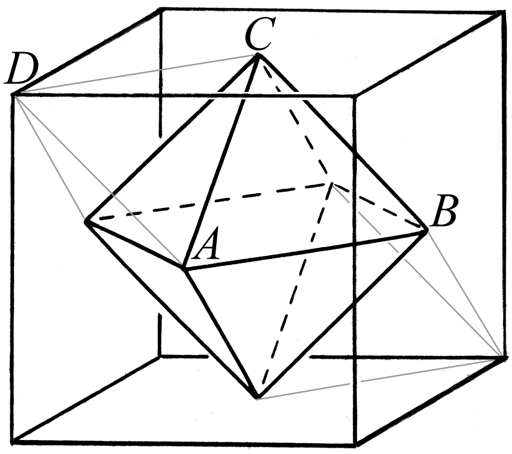
   (c) Ermitteln Sie den Abstand paralleler Seitenflächen von P (ausgedrückt durch a).

   (d) Werden auf *allen* Oktaederflächen Pyramiden (mit den entsprechenden Würfelecken als Spitze) aufgesetzt, entsteht das Polyeder $\tilde{P}$. Ist $\tilde{P}$ konvex? (Kurze Begründung)

   (e) Wie gross ist das Verhältnis der Volumeninhalte von $\tilde{P}$ und P?

$\circ$	I	X	Y	Z
I				
X				
Y				
Z				

Figur 4 (Aufgabe 3)



Figur 5 (Aufgabe 4)

5. [12P.] Die Raumkurven γ_0, γ_1 sind durch die folgenden Parameterdarstellungen gegeben:

$$\gamma_0 \text{ bzw. } \gamma_1 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi \longmapsto \vec{r}(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Was für Kurven sind γ_0, γ_1? Werden sie im Gegen- oder im Uhrzeigersinn gezeichnet?

   (b) Verbindet man zu jedem φ den Punkt $A_\varphi = (\cos\varphi, -\sin\varphi, -1) \in \gamma_0$ geradlinig mit $B_\varphi = (\cos\varphi, \sin\varphi, 1) \in \gamma_1$ entsteht durch diese Schar von Verbindungslinien eine Fläche S. Skizzieren Sie S mithilfe von γ_0 und γ_1 in einem räumlichen Koordinatensystem.

   (c) Skizzieren Sie die Umrisse der Fläche bei Betrachtung von S entlang der x-Achse, bei Betrachtung entlang der y-Achse sowie bei Betrachtung entlang der z-Achse.

   (d) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Fläche S mit den Parametern φ und t.

   (e) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}(\varphi_0, t_0)$.