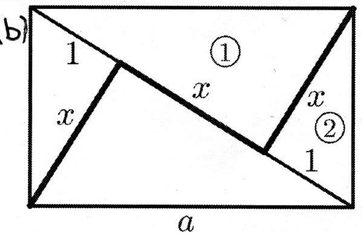
1

(a)

$\varnothing$	$\neq$	$*$	$\therefore$	$\nexists$	$\otimes$	$\mathbb{Z}$	$\in$	$\star$	$\#$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$\mathbb{D}_2$	$\mathbb{C}_2$	$\mathbb{D}_6$	$\mathbb{D}_3$	$\mathbb{C}_1$	$\mathbb{D}_4$	$\mathbb{C}_2$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{D}_5$	$\mathbb{C}_2$

(b)



① ② $\frac{x+1}{x} = \lambda = \frac{x}{1}$ ① ②

① ② $\frac{a}{b} = \lambda = \frac{x}{1} = \underline{\underline{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$

$x+1 = x^2 \leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \overset{QG}{} \xrightarrow{x>0} x = \underline{\underline{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$

oder: Pythagoras $(x+1+1)^2 = \underbrace{x^2+(x+1)^2}_{a^2} + \underbrace{x^2+1}_{b^2}$

$\rightarrow x^2+4x+4 = 3x^2+2x+2 \leftrightarrow 2x^2-2x-2=0$

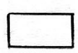
(c) GR: Goldenes Rechteck, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$|A_3B_3| \overset{GR}{=} \frac{1}{\phi}|B_3C_3| = \frac{1}{\phi}|A_1B_1|$ $\qquad |A_5B_5| \overset{GR}{=} \frac{1}{\phi}|B_5C_5| = \frac{1}{\phi}|A_3B_3|$ usw.

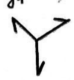
$L = 2\left(|B_1B_2| + \frac{1}{4}2\pi|B_1B_2| + |B_3B_4| + \frac{1}{4}2\pi|B_3B_4| + |B_5B_6| + \frac{1}{4}2\pi|B_5B_6| + \ldots\right)$

$= \underbrace{|A_1B_1|}_{a} + \frac{\pi}{2}\underbrace{|A_1B_1|}_{a} + \underbrace{|A_3B_3|}_{\frac{1}{\phi}|A_1B_1|} + \frac{\pi}{2}\underbrace{|A_3B_3|}_{\frac{1}{\phi}|A_1B_1|} + \underbrace{|A_5B_5|}_{\frac{1}{\phi}|A_3B_3|} + \frac{\pi}{2}\underbrace{|A_5B_5|}_{\frac{1}{\phi}|A_5B_5|} + \ldots = \left(1+\frac{\pi}{2}\right)a + \frac{1}{\phi}\underbrace{\left(|A_1B_1| + \frac{\pi}{2}|A_1B_1| + |A_3B_3| + \frac{\pi}{2}|A_3B_3| + \ldots\right)}_{L}$

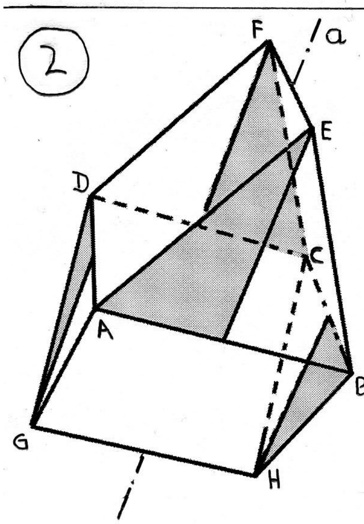
$\phi L = \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\phi \cdot a + L \leftrightarrow \phi L - L = \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\phi \cdot a \quad \underline{\underline{L = \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\phi}{\phi-1}a}} \approx 6.73a$

(d) ① Falsch Bsp.  Rechteck ($\mathbb{D}_2$)

② Richtig Sind S_{g_1} und S_{g_2} Symm.trsf., so auch $S_{g_2} \circ S_{g_1} = R_{Z,\alpha}$ $\alpha = 2 \cdot \sphericalangle(g_1, g_2)$ Skript S.95

③ Falsch Bsp.  Winkelstern ($\mathbb{C}_3$)

2



(a) A kann durch eine Symm.trsf. höchstens nach A, B, C, D (4 Mögl.) abgebildet werden. Das Bild von B ist dann wegen der Färbung eindeutig bestimmt. Ebenso ist das Bild von E dann eindeutig festgelegt. (4 Mögl. für gefärbtes Δ !)

(b) I Identität

R_a Rotation um Achse a mit 180°

DS_1 Drehspiegelung mit Drehachse a (mit Dreh ∢ 90°) und Spiegelungsebene E = (ABCD)

DS_2 Drehspiegelung mit Drehachse a (270°) und Spiegelungsebene E

(c)

$\circ$	I	R_a	DS_1	DS_2
I	I	R_a	DS_1	DS_2
R_a	R_a	I	DS_2	DS_1
DS_1	DS_1	DS_2	I	R_a
DS_2	DS_2	DS_1	R_a	I

(d) S_1 Spiegelung an Ebene durch FE ⊥ GH

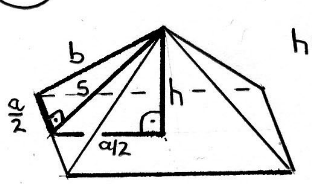
S_2 " " " " GH ⊥ FE

R_{AC} Rotation um Achse AC mit 180° $\qquad R_{BD}$ Rotation um Achse BD mit 180°

(e) Ja. Alle 4 Symm.trsf. sind auch Symm.trsf. des Würfels mit Mittelfläche ABCD

3

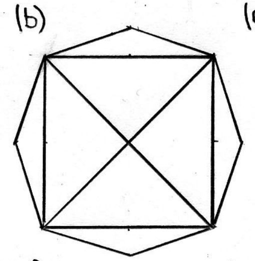
(a) $s = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5}{16}a^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}a$



$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{16}a^2 - \frac{a^2}{4}}$

$= \sqrt{\frac{1}{16}a^2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}a}}$

(b)



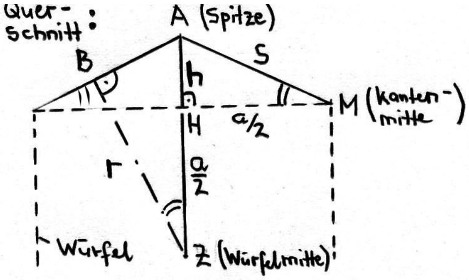
(c) $V = V_{Würfel} + 6V_{Pyr} = a^3 + 6 \cdot \frac{1}{3}a^2 \cdot h$

$= a^3 + 2a^2 \cdot \frac{a}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{2}a^3}}$

$O = \underbrace{24}_{\text{Anz. Flächen } f = 24} \cdot F_\Delta = 24 \cdot \frac{1}{2}a \cdot s = 12a \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}a = \underline{\underline{3\sqrt{5}a^2}}$

(d) Anz. Ecken $e = 14$, Anz. Kanten $k = 36$, $f = 24$ $\qquad e - k + f = 14 - 36 + 24 = 2$ ✓

(e) Quer-schnitt:



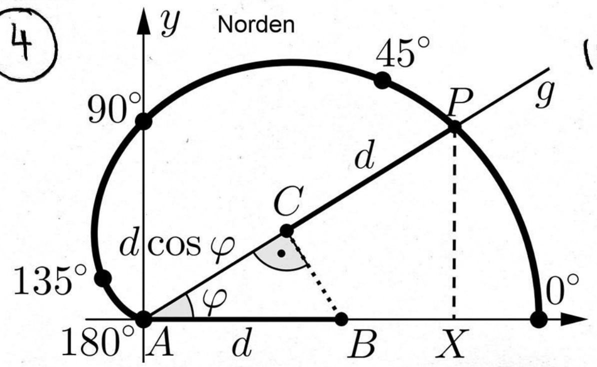
ΔZAB ist eine masstäbl. Vergrösserung von ΔMAH (gleiche Winkel gleiche Form)

$$\frac{r}{a/2} = \lambda = \frac{h+\frac{a}{2}}{s}$$

$$r = \frac{a}{2}\cdot\left(h+\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{1}{s} = \frac{a}{2}\left(\underbrace{\frac{a}{4}+\frac{a}{2}}_{\frac{3}{4}a}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{4}a} = \frac{a}{2}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{4}a}$$

$$r = \frac{3}{2\sqrt{5}}a = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{5}}{10}a}}$$

4



(b) $\cos\varphi = \frac{|AC|}{|AB|}$ $\quad |AC| = \underbrace{|AB|}_{d}\cos\varphi \quad |AP| = d\cos\varphi + d = d(1+\cos\varphi)$

$\cos\varphi = \frac{|AX|}{|AP|} \quad |AX| = |AP|\cos\varphi = d(1+\cos\varphi)\cos\varphi$

$\sin\varphi = \frac{|PX|}{|AP|} \quad |PX| = |AP|\sin\varphi = d(1+\cos\varphi)\sin\varphi$

$$\varphi \mapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} d(\cos\varphi+\cos^2\varphi) \\ d(1+\cos\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix} \quad (0 \le \varphi \le 180° \mathrel{\hat{=}} \pi)$$

(c) $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-t^2}$

$\cos\varphi = t$

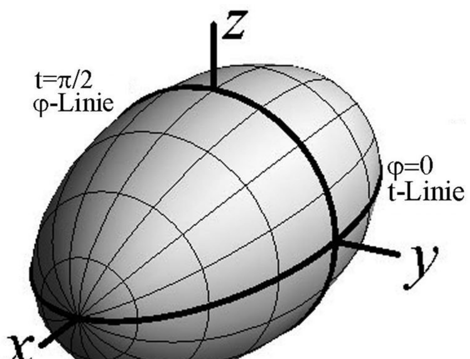
$$t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} d(t+t^2) \\ d(1+t)\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \quad (\overset{180°}{-1} \le t \le \overset{0°}{1})$$

(d) Im Punkt am weitesten links ist $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ $\underline{\text{vertikal}}$, d.h. $= \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix} \neq 0$

$0 \overset{\text{soll}}{=} x'(t) = d(1+2t) \;\rightarrow\; t = -\frac{1}{2} \qquad x\left(-\frac{1}{2}\right) = d\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = d\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{-\frac{d}{4}}}$

5

Rotationsellipsoid



(a) φ-Linien: Kreise mit Mittelpt auf x-Achse parallel (y,z)-Ebene

t-Linie zu $\varphi = 0$: Ellipse mit Halbachsen auf x- und y-Achse

(b) Nein, Entstehung durch Bewegung einer Geraden nicht mögl.

(c) $x = 2\cos t \quad y = \sin t\cos\varphi \rightarrow \cos\varphi = \frac{y}{\sin t}$

$z = \sin t\sin\varphi \rightarrow \sin\varphi = \frac{z}{\sin t}$

$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$\frac{y^2}{\sin^2 t} + \frac{z^2}{\sin^2 t} = 1$

$y^2 + z^2 = \sin^2 t$

$\cos t = \frac{x}{2} \qquad \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$$\underline{\underline{\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1}}$$

(d) Richtung der φ-Linie in $\vec{r}_0$: $\vec{s} = \vec{r}\,'_{t_0}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t_0\sin\varphi_0 \\ \sin t_0\cos\varphi_0 \end{pmatrix}$, bzw. der t-Linie: $\vec{t} = \vec{r}\,'_{\varphi_0}(t_0) = \begin{pmatrix} -2\sin t_0 \\ \cos t_0\cos\varphi_0 \\ \cos t_0\sin\varphi_0 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \vec{s}\times\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t_0\sin\varphi_0 \\ \sin t_0\cos\varphi_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2\sin t_0 \\ \cos t_0\cos\varphi_0 \\ \cos t_0\sin\varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t_0\cos t_0\sin^2\varphi_0 - \sin t_0\cos t_0\cos^2\varphi_0 \\ -2\sin^2 t_0\cos\varphi_0 \\ -2\sin^2 t_0\sin\varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t_0\cos t_0 \\ -2\sin^2 t_0\cos\varphi_0 \\ -2\sin^2 t_0\sin\varphi_0 \end{pmatrix}$$

$0 \qquad -2\sin t_0$

$-\sin t_0\sin\varphi_0 \qquad \cos t_0\cos\varphi_0$