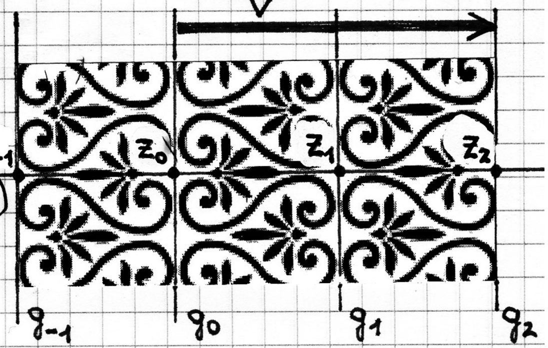
Übungsserie 5 FS 2014 Seite 1

1 Die horizontale unendliche Ausdehnung des Bandornaments hat zur Folge:



(a) als Translationsrichtung kommt nur die horizontale Richtung in Frage. Periodisches Muster ⟶ $T_{\vec{w}}$ mit $\vec{w} = n\vec{v}$ (ganzzahlige Vielfache von $\vec{v}$)
d.h. $\dots, -2\vec{v}, -\vec{v}, \vec{v}, 2\vec{v}, \dots$

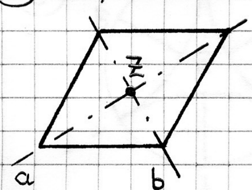
(b) als Symmetrieachsen kommen nur Mittelparallele ($\parallel \vec{v}$) oder vertikale ($\perp \vec{v}$) Geraden in Frage. Muster ⟶
S_h; $\dots, S_{g_{-1}}, S_{g_0}, S_{g_1}, \dots$
Abstand benachbarter g_k, g_{k+1}: $\frac{v}{2}$

(c) als Drehwinkel kommt nur 180° in Frage, als Drehzentren nur Punkte auf Mittelparallele h
Muster ⟶ Halbdrehungen (Punktspiegelungen) $\dots, R_{Z_{-1}}, R_{Z_0}, R_{Z_1}, \dots$; $|Z_k Z_{k+1}| = \frac{v}{2}$

(d) Gleitspiegelungen $S_h \circ T_{\vec{w}}$ mit Translationsvektor $\vec{w} = n\vec{v}$ ($n \in \mathbb{Z}$) und Sp.gerade h
Gleitspiegelungen mit Spiegelungsachsen $\perp$ h lassen sich auf reine Geradenspieg. reduzieren
z.B. $S_{g_1} \circ T_{\vec{v}} = S_{g_0}$ (gleiche Zuordnung!)

---

2 (a) Rhomus: I; $R_{Z,180°}$; S_a; S_b | Muster: I; $R_{90°}$; $R_{180°}$; $R_{270°}$ (um Z)
Mitte Muster!



(b)

∘	I	R	S_a	S_b
I	I	R	S_a	S_b
R	R	I	S_b	S_a
S_a	S_a	S_b	I	R
S_b	S_b	S_a	R	I

∘	I	R_{90}	R_{180}	R_{270}
I	I	R_{90}	R_{180}	R_{270}
R_{90}	R_{90}	R_{180}	R_{270}	I
R_{180}	R_{180}	R_{270}	I	R_{90}
R_{270}	R_{270}	I	R_{90}	R_{180}

In der Hauptdiagonale stets I, hier nicht (zyklisch!)

---

3 (a)

Wortlänge	Anz	Wort
1	1	B
2	2	AB, BB
3	3	ABB, BBB, BAB
4	5	ABBB, BBBB, BABB, ABAB, BBAB
5	8	ABBBB, BBBBB, BABBB, ABABB, BBABB, ABBAB, BBBAB, BABAB
⋮		
n	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, ($a_1 = 1$, $a_2 = 2$)	

(b)
↳ alle Wörter der vorvorhergehenden Länge können durch AB ergänzt werden
→ alle Wörter der vorhergehenden Länge* können durch B ergänzt werden (Endung auf A nicht möglich!)
Dies sind alle möglichen Wörter (sonst hätte vorher schon ein Wort gefehlt)

(c) $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{f_{n+1}}{f_n} \xrightarrow{n \to \infty} \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen f_n, f_{n+1} strebt gegen das Verhältnis des Goldenen Schnitts

Übungsserie 5 FS 2014 Seite 2

4

$\mathbb{T}$ Keine Gruppe, denn $s, t \in \mathbb{T}$: $s \cdot t$ im allg. kein Teiler von 1024 ↯ (G1)
z.B. $2 \cdot 1024 = 2048$

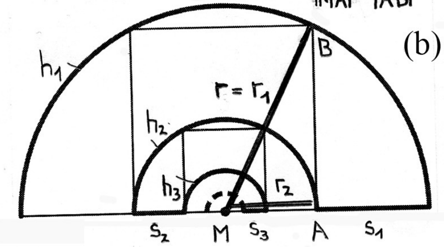
$\mathbb{E}$ Keine Gruppe, denn $t \in \mathbb{E}: e \cdot t = t \cdot e = t \rightarrow e = 1$ "Neutralelement" nicht Element $\mathbb{E}$ ↯ (G3)

$\mathbb{K}$ keine Gruppe, denn $t \in \mathbb{K}: t \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \cdot t = 1$ (Neutralelement) $\rightarrow t^{-1} = \frac{1}{t}$ ↯ (G4)
z.B. $t = 8$, $t^{-1} = \frac{1}{8}$, t^{-1} kein Element von $\mathbb{K}$

$\mathbb{D}$ unendl. kommutative Gruppe: (G1) Für $10^n, 10^m \in \mathbb{D}$ ist $10^n \cdot 10^m = 10^{n+m}$ auch Zehnerord.
(G2) $(10^n \cdot 10^m) \cdot 10^k = 10^{n+m+k} = 10^n (10^m \cdot 10^k)$ (G3) $1 \in \mathbb{D}$ Neutralelement mit $10^n \cdot 1 = 10^n$
(G4) zu $10^n \in \mathbb{D}$ ist $\frac{1}{10^n} = 10^{-n} \in \mathbb{D}$ mit $10^n \cdot 10^{-n} = 1$ (KG) $10^n \cdot 10^m = 10^{n+m} = 10^m \cdot 10^n$

5

Im ⊾ΔMAB: $r_1^2 = \underbrace{r_2^2}_{|MA|} + (\underbrace{2r_2}_{|AB|})^2 = 5r_2^2 \rightarrow r_1 = \sqrt{5}\, r_2$, $r_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} r_1$, $s_1 = r_1 - r_2 = r_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} r_1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) r_1$



(b) Jeder nachfolgende Radius $r_3, r_4, \ldots$ ist eine massstäbliche Verkleinerung des vorhergehenden mit Faktor $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$L = h_1 + s_1 + h_2 + s_2 + \ldots = \pi r_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) r_1 + \pi \underbrace{r_2}_{\frac{1}{\sqrt{5}} r_1} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \underbrace{r_2}_{\frac{1}{\sqrt{5}} r_1} + \ldots$$

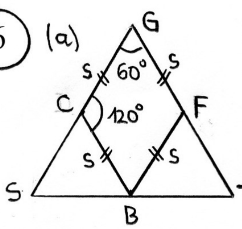
$$= \pi r_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) r_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\left[\pi r_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) r_1 + \ldots\right]}_{L}$$

$\rightarrow L - \frac{1}{\sqrt{5}} L = \pi r_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) r_1 \quad \| \cdot \sqrt{5}$

$L(\sqrt{5} - 1) = r_1 (\pi \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1)$ $\quad L = \frac{\pi \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} - 1} r_1$ $(= 6.68 \cdot r)$

6

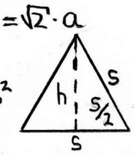
(a)



Rhombus (Raute) mit Seitenlänge $s = \frac{1}{2}|SG| = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 4a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot a$ und Winkel 60° bzw. 120°

(b) Oberfläche $O = 6F_{\#} = 12 F_{\Delta}$ mit $F_{\Delta} = \frac{1}{2} s \cdot \underbrace{\sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}}}_{h} = \frac{1}{2} s \sqrt{\frac{3s^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2$

$= 12 \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2} a)^2 = 6\sqrt{3} a^2$



(c) $e = 8, f = 6, k = 12$ $\quad e - k + f = 8 - 12 + 6 = 2$ ✓ Komb. regulär < lauter Rhomben / lauter 3-kantige Ecke

(d) reg. Oktaeder

(e) Volumen $V = V_{Okt} + 2V_{Tetra}$ mit $V_{Okt} = 2 \cdot \frac{1}{3} s^2 \cdot a = 2 \cdot \frac{1}{3} (\sqrt{2} a)^2 a = \frac{4}{3} a^3$

$= \frac{4}{3} a^3 + 2 \cdot \frac{1}{3} a^3$ $\quad V_{Tetra} \overset{*}{=} \frac{\sqrt{2}}{12} s^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} (\sqrt{2} a)^3 = \frac{1}{3} a^3$ (*Skript S.61)

$= 2a^3$