ETHZ D-ARCH
Studiengang
Architektur

Basisprüfung

Mathematisches Denken I & II

Herbst 2006
Dozent
Dr. M. Leupp

Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!**

Erlaubte Hilfsmittel: Vorlesungsnotizen, Übungsserien, elementarer Taschenrechner *Zeit: 3 Std.*

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen.

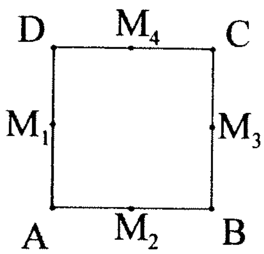
1. [20P.] **Kurzaufgaben:** ~~(jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)~~

   (a) Ordnen Sie alle Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 8, 9$ sowie die Zeichen $+, -, \cdot, :$ ihrer jeweiligen **Symmetriegruppe** $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{C}_1, \ldots$ zu. (Schnörkel, Verbreiterungen vernachlässigen!)

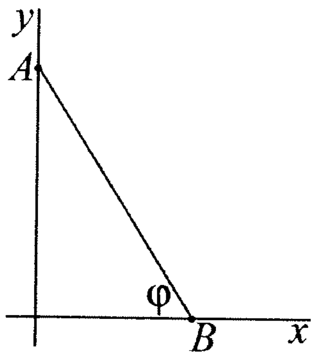
   (b) Gegeben ist das **Quadrat** $ABCD$ mit Seitenmitten M_1, M_2, M_3, M_4 (Figur 1). Untersuchen Sie die **Verkettung** $T = R_{D,-90°} \circ R_{C,-90°} \circ R_{B,-90°} \circ R_{A,-90°}$ der vier Vierteldrehungen im Uhrzeigersinn um A, B, C und D. Um was für eine besondere Transformation handelt es sich? Anleitung: Studieren Sie die Bilder speziell gewählter Punkte und benutzen Sie Satz 2.9 (vgl. Notizen zur Vorlesung).

   (c) Die **Lichtintensität** (Beleuchtungsstärke) einer Lichtquelle ist proportional zur Leistung der Lichtquelle und umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung. Eine Lichtquelle vierfacher Leistung ist 12 m entfernt von einer zweiten Lichtquelle einfacher Leistung. In welchem Abstand von der schwächeren Lichtquelle, auf der Verbindungslinie der beiden, leuchten beide gleich stark?

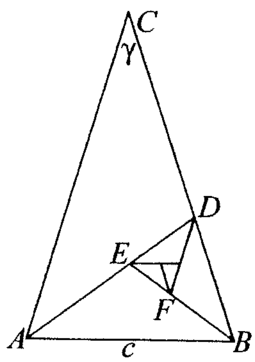
   (d) Die **Leiter** AB mit der Länge l gleitet mit ihren Enden den Koordinatenachsen entlang (Figur 2). Benutzen Sie den Parameter φ und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Bahnkurve der Leitermitte. Um was für eine Kurve handelt es sich? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente)



Figur 1 (Aufgabe 1b)



Figur 2 (Aufgabe 1d)



Figur 3 (Aufgabe 2)

2. [10P.] Im gleichschenkligen Dreieck ABC mit $|AB| = c$ sind die durch den Punkt D gebildeten Teildreiecke ABD, ADC wiederum gleichschenklig (Figur 3).

   (a) Berechnen Sie den Winkel γ bei der Spitze C des Dreiecks ABC. Um was für ein Dreieck handelt es sich?

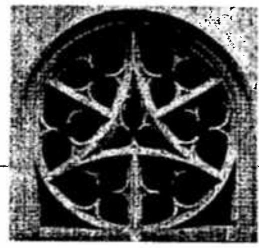
   (b) Zeigen Sie, dass gilt: $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|BD|}$ (D teilt BC nach dem Goldenen Schnitt)
   (Tipp: Das Dreieck ABC ist eine massstäbliche Vergrösserung des Dreiecks ABD.)

   (c) Figur 4 zeigt die Konstruktion der Seitenlänge s eines regulären **Zehnecks**. Berechnen Sie das Verhältnis von Seitenlänge s zu Umkreisradius r.

   (d) E teilt Dreieck ABD in gleichschenklige Teildreiecke, F Dreieck BDE, ... Berechnen Sie die Länge des Streckenzugs $ABDEF\ldots$ (Die Endlichkeit sei vorausgesetzt.)

3. [8P.] Bezeichne Symm(Ω) die Menge aller Symmetrietransformationen der **Figur** Ω.
(Ein Fenster der Zisterzienserabtei HAUTERIVE im Kanton Freiburg)

(a) Übertragen Sie Ω (vereinfacht, nur Kreisinneres!) in Ihre Unterlagen und ermitteln Sie Symm(Ω). (Bezeichnungen einführen)
(b) Stellen Sie von Symm(Ω) die zugehörige Gruppentafel auf.
(c) Zählen Sie alle möglichen Gruppen (inkl. Symm(Ω)) auf, die sich durch Kombination von Elementen aus Symm(Ω) bilden lassen. Skizzieren Sie zu jeder Gruppe ein Dreieck, welches diese Symmetriegruppe besitzt.



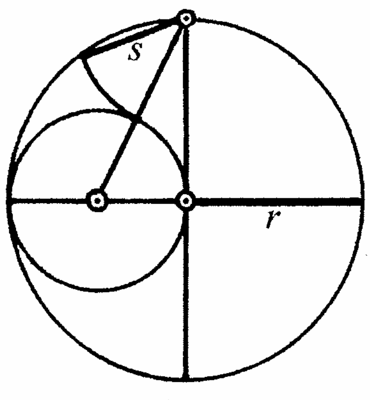
Figur Ω

4. [10P.] Ein **Würfel** mit der Kantenlänge a kann mit einem Kragen versehen werden (Figur 5), ... welcher nicht abgenommen werden kann! (Die Innenkanten des Kragens verlaufen geradlinig entlang Verbindungen von Kantenmitten des Würfels.)
(a) Was für eine Figur bilden die Innenkanten des Kragens? (Seitenlänge angeben)
(b) Welchen Flächeninhalt weist das Loch des Kragens auf?
(c) Die Kragenbreite (Abstand zwischen paralleler Innen- & Aussenkante) betrage ein Viertel des Lochdurchmessers (Abstand zwischen zwei gegenüberliegenden, parallelen Innenkanten). Wie gross ist dann der Flächeninhalt des Kragens?
(d) Geschenkpackung: Bezeichne P das kleinste konvexe Polyeder, welches Würfel samt Kragen (Figur 5) umgibt. Ermitteln Sie die Anzahl Ecken, Flächen und Kanten der 'Verpackung' P und verifizieren Sie die Eulersche Polyederformel.

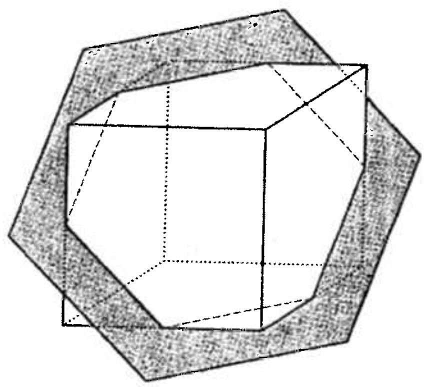
5. [12P.] Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S, ein **Konoid**, beschrieben

$$S:\ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r} := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ t \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi\,,\ 0 \le t \le 1)$$

(a) Skizzieren Sie die Fläche S in ein räumliches Koordinatensystem durch ein angedeutetes Netz von φ- und t-Linien. Was für Kurven sind die φ- bzw. die t-Linien?
(b) Ist S eine Regelfläche? Ist S abwickelbar? (Kurze Begründungen ohne Rechnung)
(c) Skizzieren Sie die Umrisse der Fläche bei Betrachtung von S entlang der x-Achse, bei Betrachtung entlang der y-Achse sowie bei Betrachtung entlang der z-Achse.
(d) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.
(e) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}(\varphi_0, t_0)$.



Figur 4 (Aufgabe 2)



Figur 5 (Aufgabe 4)

(1) (a) $\mathbb{C}_1$: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 $\mathbb{D}_1$: 3 $\mathbb{D}_2$: 0, 8, —, : $\mathbb{D}_4$: + $\mathbb{D}_\infty$: • (5P)

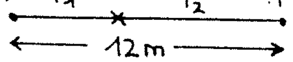
(b) $M_1 \xmapsto{R_A} M_2 \xmapsto{R_B} M_3 \xmapsto{R_C} M_4 \xmapsto{R_D} M_1$, M_1 ist Fixpunkt von T, D auch

$D \longmapsto B \longmapsto B \longmapsto D \longmapsto D$ (T ist Kongruenztransformation, da Verkettung solcher)

T ist gleichsinnig (da Verkettung von Rotationen)

Nach Satz 2.9 ist T eine Rotation (nicht mögl. da 2 Fixpunkte) oder die Identität (5P)

(c) 4P r_1 r_2 P



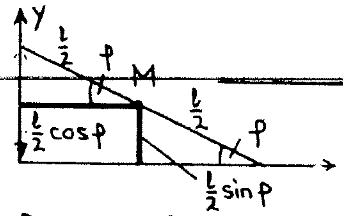
Intensität 1.LQ, Int. 2.LQ: $\text{Konst}\frac{4P}{r_1^2} = \text{Konst}\frac{P}{r_2^2}$

Lichtint. = konst $\frac{\text{Leistung}}{\text{Entfernung}^2}$

$4 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \rightsquigarrow r_2 = 2r_1$

da $12m = r_1 + r_2 = 3r_1 \rightsquigarrow r_1 = 4m$ (5P)

(d)

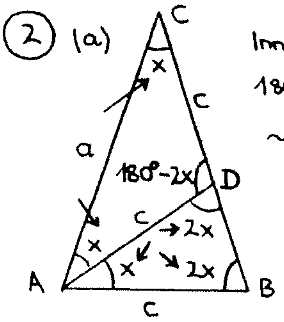


Parameter φ

Leitermittelpunkt $M = \left(\frac{l}{2}\cos\varphi, \frac{l}{2}\sin\varphi\right)$, Parameterdrst. der Bahnkurve: $\varphi \longmapsto \vec{F}(\varphi) = \begin{pmatrix} l/2 \cos\varphi \\ l/2 \sin\varphi \end{pmatrix}$

erkennen ist Par'drst (Viertel)-kreis um (0,0) mit Radius $l/2$ (5P)

(2) (a)



Innenwinkelsumme im ΔABC

$180° = x + 2x + 2x = 5x$

$\rightsquigarrow \gamma = x = \underline{\underline{36°}}$

ΔABC ist ein 36°-72°-72° Dreieck, ΔABD auch Goldenes Dreieck

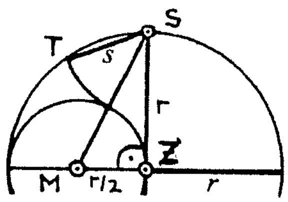
(b) Sei λ der Vergrösserungsfaktor

$$\underbrace{\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|BC|}{|AD|}}_{\text{gleich}} = \lambda = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|CD|}{|BD|}$$

Schenkel im ΔABC / Schenkel im ΔABD; Basis im ΔABC / Basis im ΔABD

(analog Beweis Satz 2.6 im Skript) (10P)

(c)



Im ΔMZS:

$|MS| = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}r^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}r$

$s = |MS| - \frac{1}{2}r = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)r$

$\frac{s}{r} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \quad \left(= \frac{1}{\phi}\right)$

(d.h. ΔSTZ ist ein Goldenes Dreieck mit Winkeln 36°-72°-72°)
$\rightsquigarrow$ 10-Eck

(d) ΔABD ist eine massstäbl. Verkleinerung von ΔABC, ΔBDF von ΔABD usw. mit Faktor ϕ, wobei $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Verhältnis GS)

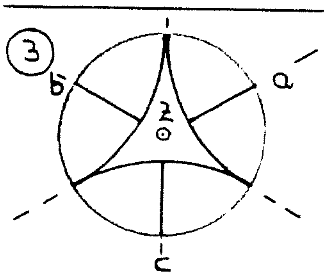
Länge: $L = |AB| + |BD| + |DE| + |EF| + \ldots$

$L = c + \frac{1}{\phi}|AB| + \frac{1}{\phi}|BD| + \frac{1}{\phi}|DE| + \ldots$

$L = c + \frac{1}{\phi}\underbrace{(|AB| + |BD| + |DE| + \ldots)}_{L}$

$L - \frac{1}{\phi}L = c \qquad \underline{\underline{L = \frac{c}{1 - 1/\phi}}} = \underline{\underline{\frac{c\cdot\phi}{\phi - 1}}}$

(3)



(a) $\text{Symm}(\Omega) = \{I, R_{Z,120°}, R_{Z,240°}, S_a, S_b, S_c\} \mathrel{\hat{=}} \mathbb{D}_3$

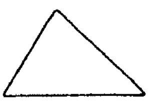
(b)

$\circ$	I	$R_{Z,120°}$	$R_{Z,240°}$	S_a	S_b	S_c
I	I	$R_{Z,120°}$	$R_{Z,240°}$	S_a	S_b	S_c
$R_{Z,120°}$	$R_{Z,120°}$	$R_{Z,240°}$	I	S_c	S_a	S_b
$R_{Z,240°}$	$R_{Z,240°}$	I	$R_{Z,120°}$	S_b	S_c	S_a
S_a	S_a	S_b	S_c	I	$R_{Z,120°}$	$R_{Z,240°}$
S_b	S_b	S_c	S_a	$R_{Z,240°}$	I	$R_{Z,120°}$
S_c	S_c	S_a	S_b	$R_{Z,120°}$	$R_{Z,240°}$	I

pro Fehler $-\frac{1}{2}$P

(c) $\{I\}$; $\{I, S_a\}$, $\{I, S_b\}$, $\{I, S_c\}$; $\{I, R_{Z,120°}, R_{Z,240°}\}$; $\text{Symm}(\Omega)$

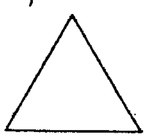
a bzw b bzw c



allg. Dreieck

gleichschenkliges Dreieck

gibt keines



gleichseitiges Dreieck (8P)

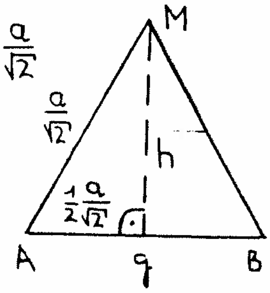
④ Reguläres Sechseck mit Seitenlänge $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{a}{\sqrt{2}}}}$

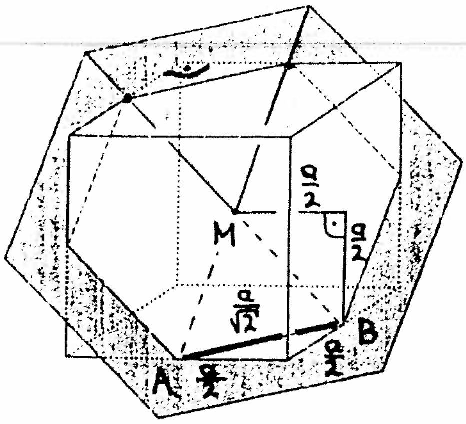
(a) (ABM ist ein gleichseitiges Dreieck)

(b) $F_{Loch} = 6 \cdot F_{\Delta} = 6 \cdot \frac{1}{2} g \cdot h$ mit $g = \frac{a}{\sqrt{2}}$

und $h = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{8}} = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{8}}$

$F_{Loch} = 3 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{8}} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}}{4} a^2}}$





(c) Das 6-Eck der Kragenaussenseite ist eine massstäbl. Vergrösserung des 6-Ecks des Lochs: Längenfaktor $\frac{3}{2}$ → Flächenfaktor $\frac{9}{4}$, d.h. $F_{6\text{-Eck}} = \frac{9}{4} F_{Loch}$

$F_{Kragen} = F_{6\text{-Eck}} - F_{Loch} = \frac{5}{4} F_{Loch} = \underline{\underline{\frac{15\sqrt{3}}{16} a^2}}$ (oder $s_{6\text{-Eck}} = \frac{3}{2} g = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$, $h_{6\text{-Eck}} = \frac{3}{2} h = \frac{3\sqrt{3}a}{2\sqrt{8}}$ ...)

(d) Symmetrie (jede Würfelfläche erfährt eine "Erhöhung" gleicher Art)

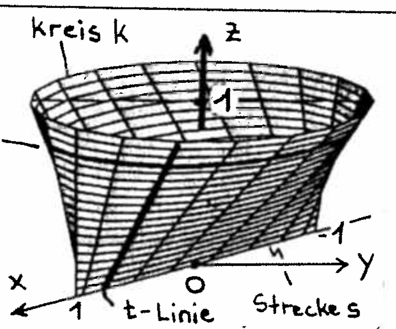
Ecken: $e = 8 + 6 = \underline{14}$ (8 Würfel, 6 Eck) Flächen: $f = 6 \cdot 4 = 24$ (pro Würfelfläche) Kanten: $k = 6\left(3 + \frac{6}{2}\right) = 36$ (3 einfach, $\frac{6}{2}$ "doppelt", pro Fläche)

$(e - k + f = 2 \checkmark)$

10P

---

⑤ (a)



t-Linien: Geradenstücke (parallel (y,z)-Ebene)

φ-Linien: Ellipsen um die z-Achse

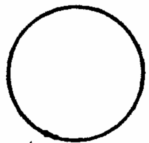
(b) S entsteht durch Bewegung einer Geraden entlang dem Kreis k und der Strecke s auf der x-Achse
→ Schar gerader Linien: Regelfläche

Die Tangentialebene entlang der markierten t-Linie ist nicht konstant, sie "dreht" sich, nicht abwickelbar

(c) Entlang x-Achse: (gleichschenkl. Dreieck)

Entlang y-Achse: (Rechteck)

Entlang z-Achse (Kreis)



(d) $x = \cos\varphi$, $y = t\sin\varphi$, $z = t$ $\quad x^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \rightarrow x^2 + \frac{y^2}{z^2} = 1$

$\underline{\underline{x^2 z^2 + y^2 = z^2}}$

(e) Idee: $\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t}$

$\vec{s} = \vec{r}_{t_0}'(\varphi_0) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ t_0\cos\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{t} = \vec{r}_{\varphi_0}'(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{n} = \vec{s} \times \vec{t} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} t_0\cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \\ -\sin^2\varphi_0 \end{pmatrix}}}$

(Bem: $\vec{n}$ "dreht" entlang allgemeiner t-Linie ⇝ nicht abwickelbar)

12P