ETH Zürich — Frühjahr 2013

Dr. P. Thurnheer

Musterlösungen

zur Basisprüfung Mathematik I und II für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umweltnaturwissenschaften

---

1. **a)** Aus

$$\begin{aligned}0 &= (\ln x)^2 + \ln\left(x^{\frac{3}{2}}\right) + \ln\left(\ln\left(e^{\sqrt{x}}\right)\right) + \ln\left(x^{-3}\right)\\ &= (\ln x)^2 + \frac{3}{2}\,\ln x + \ln\left(\sqrt{x}\ln e\right) - 3\ln x\\ &= \ln x\,\left(\ln x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 3\right) = \ln x\,(\ln x - 1)\end{aligned}$$

folgt $\ln x \in \{0,1\}$, also $x = 1$ oder $x = e$.

b) Es gelten

$$\left|\frac{z^2}{\sqrt{2}-4i}\right| \Big/ \left|\frac{ze^{\frac{i\pi}{6}}}{1+i}\right| = \frac{|z|^2}{|\sqrt{2}-4i|} \Big/ \frac{|z|\,|e^{\frac{i\pi}{6}}|}{|1+i|} = \frac{|z|^2\sqrt{2}}{|z|\sqrt{18}} = \frac{|z|}{3},$$

$$\arg\left(\frac{2i}{\sqrt{3}+i}\right) = \arg\left(\frac{2\left(1+i\sqrt{3}\right)}{3+1}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

und also $\arg\left(z^2\right) = \pi/3$ und $|z| = 3$, d.h.

$$z = z_1 = 3e^{\frac{1}{2}\frac{i\pi}{3}} = 3e^{\frac{i\pi}{6}} \qquad \text{oder} \qquad z = z_2 = 3e^{\frac{1}{2}\left(\frac{i\pi}{3}+2i\pi\right)} = 3e^{\frac{7i\pi}{6}}.$$

2. **a)** Es gelten

$$f'(x) = \frac{3}{2}\,(1+x)^{\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = \frac{3}{4}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \quad f^{(3)}(x) = -\frac{3}{8}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}},$$

und damit $j_0^3 f(x) = 1 + \dfrac{3}{2}\,x + \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\,x^2 - \dfrac{1}{6}\dfrac{3}{8}\,x^3 = 1 + \dfrac{3}{2}\,x + \dfrac{3}{8}\,x^2 - \dfrac{1}{16}\,x^3.$

b) Mit **a)** folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x} + \frac{3}{8} - \frac{x}{16} - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{8} - \frac{x}{16}\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{16}\,\lim_{x\to 0} x = \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Bitte wenden!

3. Die homogene Gleichung $\dot{x} = 2x/t$ lässt sich durch Separation lösen: für $x, t \neq 0$ gilt

$$\int \frac{dx}{x} = 2\int \frac{dt}{t} \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = 2\ln|t| + C \quad \Rightarrow \quad x(t) = Ct^2$$

mit einer generischen Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

Für die inhomogene Gleichung führt der Ansatz $x_p(t) = C(t)t^2$ auf

$$\dot{x}(t) = \dot{C}(t)t^2 + 2C(t)t = 2C(t)t + \ln t,$$

also $\dot{C}(t) = \dfrac{\ln t}{t^2}$ und damit

$$C(t) = \int \frac{\ln t}{t^2}\,dt = -\frac{\ln t}{t} + \int \frac{dt}{t^2} = D - \frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t},$$

also $x_p(t) = (Dt - \ln t - 1)\,t$ mit einer gewissen Konstanten $D \in \mathbb{R}$.

Aus der Anfangsbedingung

$$2 = x(1) = D - 0 - 1 \qquad \text{folgt} \qquad D = 3,$$

und also $x(t) = (3t - \ln t - 1)\,t$.

4. Für die Funktion f gelten

$$f'(x) = \frac{C}{\sqrt{f(x)}}, \qquad f(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad f(1) = 4$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Durch Separation folgt

$$\int \sqrt{f}\,df = C\int dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2}{3}\,f^{\frac{3}{2}} = Cx + D$$

und damit $f(x) = (Cx + D)^{\frac{2}{3}}$ mit Konstanten $C, D \in \mathbb{R}$. Aus

$$\begin{aligned} 1 = f(0) = (C\cdot 0 + D)^{\frac{2}{3}} \qquad &\Rightarrow \qquad D = \pm 1^{\frac{3}{2}} = \pm 1, \\ 4 = f(1) = (C\cdot 1 + D)^{\frac{2}{3}} \qquad &\Rightarrow \qquad C = \pm 4^{\frac{3}{2}} - D = \pm 8 - D \end{aligned}$$

folgt schliesslich

$$\begin{aligned} &f(x) = (7\,x + 1)^{\frac{2}{3}} \qquad \text{oder} \qquad f(x) = (1 - 9\,x)^{\frac{2}{3}} \qquad \text{oder} \\ &f(x) = (9\,x - 1)^{\frac{2}{3}} \qquad \text{oder} \qquad f(x) = (-7\,x - 1)^{\frac{2}{3}}\,. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

5. Elementare Zeilenumformungen liefern

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & -3 & \beta \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & \alpha & 0 & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & \beta-6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha-2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha-2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & \beta-6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & -10 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha-5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \beta-4 \end{array}\right).$$

Das lineare System $A\underline{x} = \underline{b}$ hat also dann und nur dann unendlich viele Lösungen, wenn $\alpha = 5$ und $\beta = 2$ und in diesem Fall ergeben sich aus

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & -10 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

die Gleichungen

$$x_1 = 7x_3 - 13, \qquad x_2 = 5 - 3x_3 \qquad \text{und} \qquad x_4 = -1.$$

Wählen wir z.B. x_3 als freien Parameter, so folgt

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

6. Aus $A\underline{b} = \lambda\underline{b}$ und

$$A\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 2(\beta-1) \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha/3 \\ 2(\beta-1)/3 \end{pmatrix}$$

folgt $\lambda = \alpha = 3$ und $3\beta = 2\beta - 2$, also $\beta = -2$. Das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + 0$$

hat die Wurzeln $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 1$. Insbesondere ist A diagonalisierbar, so dass jedes Tripel $(\underline{b}, \underline{c}, \underline{d})$ von Eigenvektoren zu λ_1, λ_2 und λ_3 linear unabhängig ist.

Bitte wenden!

Für die Eigenvektoren zu λ_2 und λ_3 folgt

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \underline{c} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{c} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \underline{d} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{d} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

7. Nach Voraussetzung ist $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} u & 2 \\ 2 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+2 \\ v+2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

und somit $u = v = -\dfrac{1}{2}$.

Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 2 \\ 2 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 - 4 = \lambda^2 + \lambda - \frac{15}{4}$$

hat die beiden Wurzeln $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+15}}{2} = \dfrac{-1 \pm 4}{2}$.

Für die Eigenvektoren $\underline{v}_2$ zum Eigenwert $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \underline{v}_2 = \underline{0} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{v}_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Daher ist die allgemeine Lösung von der Form

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{v}_1 + c_2 e^{\lambda_1 t} \underline{v}_2 = c_1 e^{\frac{2t}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 e^{-\frac{5t}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. **a)** Aus

$$0 = f(g(u,v)) = u^2 + v^2 - 2uv = (u-v)^2$$

folgt $u = v$ und damit

$$\gamma(t) = g(t,t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Aus $4 = z = t^2$ folgt $t = \pm 2$. Die Schnittpunkte sind also $(\pm 2, 4, 4)$.

Der Gradient der Funktion f ist

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{also ist} \quad \nabla f(2,4,4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor der Tangentialebene an $\mathcal{F}_1$ im Punkt $(2,4,4)$. Aus

$$4x + y - 2z = 4 \cdot 2 + 4 - 2 \cdot 4 = 4$$

ergibt sich die Koordinatengleichung $4x + y - 2z = 4$.

Ferner gelten

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \\ u \end{pmatrix},$$

also ist

$$\frac{\partial g}{\partial u}(2,2) \times \frac{\partial g}{\partial v}(2,2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor der Tangentialebene an $\mathcal{F}_2$ im Punkt $(2,4,4)$. Aus

$$8x + 2y - 4z = 8 \cdot 2 + 2 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 8$$

ergibt sich ebenfalls die Koordinatengleichung $4x + y - 2z = 4$.

Entsprechend erhält man für die beiden Tangentialebenen im zweiten Schnittpunkt $(-2,4,4)$ jeweils die Koordinatengleichung $-4x + y - 2z = 4$.

9. **a)** Es ist $z = f(x,y) = x^2 - y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Die Niveaulinien

$$\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c \,\} = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - c \,\}, \quad c \in \mathbb{R},$$

sind (verschobene) Normalparabeln.

b) Wegen $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}$ gilt für die Richtungsableitung

$$D_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} f(2,3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Bitte wenden!

c) Nach **a)** besitzt f keine lokalen Extrema. Die globalen Extrema werden also auf dem Rand der Einheitskriesscheibe $\mathbb{E}$ angenommen, der z.B. durch

$$t \mapsto (\cos t, \sin t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

parametrisiert wird. Es sind also die Extrema der Funktion

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin t && \text{mit} \\ \varphi'(t) &= -2\sin t \cos t - \cos t = -(2\sin t + 1)\cos t && \text{und} \\ \varphi''(t) &= -2\cos^2 t + (2\sin t + 1)\sin t. \end{aligned}$$

Ihre kritischen Punkte ergeben sich aus

$$\begin{aligned} \cos t = 0 \quad &\Rightarrow \quad t \in \left\{\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right\}, \\ \sin t = -\tfrac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad t \in \left\{\tfrac{7\pi}{6}, \tfrac{11\pi}{6}\right\}, \end{aligned}$$

und aufgrund des jeweiligen Vorzeichens von φ'' folgt, dass φ

- das Minimum $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1$ und
- das lokale Minimum $\varphi\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0 + 1 = 1$ sowie
- das Maximum $\varphi\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = \varphi\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) = 1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{4}$

annimmt. Somit ist -1 der kleinste, $\frac{5}{4}$ der grösste angenommene Wert.

10. **a)** Die Ellipse wird z.B. durch $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, parametrisiert.

Wegen

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad (F \circ \gamma)(t) = \begin{pmatrix} \sin^2 t \\ -\sin t \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist die Arbeit (für die gewählte Orientierung)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (F \circ \gamma)(t) \cdot \dot\gamma(t)\, dt &= -\int_0^{2\pi} \sin t \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\, dt \\ &= -\int_0^{2\pi} \sin t\, dt = 0 \end{aligned}$$

unabhängig von der gewählten Orientierung.

Siehe nächstes Blatt!

b) Da γ einen geschlossenen Weg parametrisiert, ist die Arbeit sicher dann $= 0$, wenn G ein Potentialfeld ist, wenn also $G(x, y, z) = \nabla\varphi(x, y, z)$ für eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Für eine solche Funktion müssen dann

$$\varphi_y(x, y, z) = \sin\left(x^2\right) xze^{xyz} = \frac{\partial}{\partial y} \sin\left(x^2\right) e^{xyz} \qquad \text{und}$$
$$\varphi_z(x, y, z) = \sin\left(x^2\right) xye^{xyz} = \frac{\partial}{\partial z} \sin\left(x^2\right) e^{xyz}$$

gelten, also ist $\varphi(x, y, z) = \sin\left(x^2\right) e^{xyz} + \int \psi(x')\, dx'$ und

$$g(x, y, z) = \varphi_x(x, y, z) = 2\cos\left(x^2\right) xe^{xyz} + \sin\left(x^2\right) yze^{xyz} + \psi(x)$$

für eine Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (z.B. $\psi \equiv 0$).

11. In Polarkoordinaten, $x(r, \varphi) = r\cos\varphi$, $y(r, \varphi) = r\sin\varphi$, ergibt sich

$$f\left(x(r, \varphi), y(r, \varphi)\right) = 3 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi = 3 - r^2.$$

Das Integral über den Kreisring K ist demnach

$$\begin{aligned}
\iint_K f(x, y)\, dx\, dy &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 f\left(x(r, \varphi), y(r, \varphi)\right)\, r\, dr\, d\varphi \\
&= 3\int_0^{2\pi} \int_1^2 r\, dr\, d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^3\, dr\, d\varphi \\
&= 2\pi\left(\left.\frac{3r^2}{2}\right|_1^2 - \left.\frac{r^4}{4}\right|_1^2 \right) = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$