ETH Zürich
Dr. P. Thurnheer

Sommer 2012

MUSTERLÖSUNGEN

zur Basisprüfung Mathematik I und II für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umweltnaturwissenschaften

---

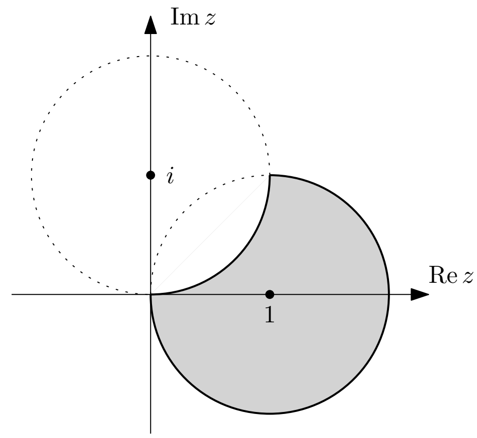
1. a) Aus

$$\begin{aligned} 0 &= (z-3i-3) - i\,(z+2+4i) \\ &= z - 3i - 3 - iz - 2i + 4 \\ &= (1-i)\,z - 5i + 1 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} z &= \frac{-1+5i}{1-i} = \frac{(1+i)(-1+5i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{-6+4i}{2} = -3+2i. \end{aligned}$$

b)



2. a) Es gilt $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{e^{\sin x}+1} = \frac{e^{\sin 0}-1}{e^{\sin 0}+1} = \frac{e^0-1}{e^0+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0.$

b) Zweimaliges Anwenden der Regel von Bernoulli-de L'Hospital ergibt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{x+1}}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}} \\ &= \frac{0+\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{x}{(x+1)^2}} = \frac{0+1}{\frac{2}{1}-0} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Für $x(t) = e^{\sin t}$ sind

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \cos t\, e^{\sin t}, \qquad \ddot{x}(t) = \left(-\sin t + \cos^2 t\right) e^{\sin t} \qquad \text{und} \\ &\dddot{x}(t) = \left(-\cos t - 3\sin t\cos t + \cos^3 t\right) e^{\sin t}. \end{aligned}$$

a) Durch Einsetzen findet man

$$\begin{aligned} &\ddot{x}(t) - \dot{x}(t)\cos t + x(t)\sin t \\ &\quad = \left(-\sin t + \cos^2 t - \cos^2 t + \sin t\right) e^{\sin t} = 0. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

b) Das Taylorpolynom dritten Grades von x um $t = 0$ ist

$$\begin{aligned} j_0^2 x(t) &= x(0) + \dot{x}(0)\, t + \frac{\ddot{x}(0)}{2}\, t^2 + \frac{\dddot{x}(0)}{6}\, t^3 \\ &= 1 + 1 \cdot t + \frac{1}{2}\, t^2 + \frac{0}{6}\, t^3 = 1 + t + \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

4. Für $x_p(t) = a \sin t + b \cos t$ sind

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= a \cos t - b \sin t && \text{und} \\ \ddot{x}_p(t) &= -a \sin t - b \cos t = -x_p(t), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_p(t) + \dot{x}_p(t) \cos t + x_p(t) \sin t \\ &\quad = (\sin t - 1)\, x_p(t) + a \cos^2 t - b \sin t \cos t \\ &\quad = (\sin t - 1)\, x_p(t) + a - \sin t\, (a \sin t + b \cos t) \\ &\quad = a - x_p(t) = a\, (1 - \sin t) - b \cos t. \end{aligned}$$

Somit ist x_p für $a = -2$ und $b = 0$ eine Lösung der Differentialgleichung.

5. Für Lösungen der homogenen Gleichung $\dot{x}(t) = -\tan t\, x(t)$ gilt

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \tan t\, dt = \ln \cos t + c, \quad \text{also} \quad x(t) = C \cos(t), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Um eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir den Ansatz $x(t) = C(t) \cos t$. Einsetzen in die inhomogene Gleichung liefert

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \tan t\, x(t) &= \dot{C}(t) \cos t - C(t) \sin t + C(t) \frac{\sin t}{\cos t} \cos t \\ &= \dot{C}(t) \cos t = t \cos^2 t, \end{aligned}$$

also

$$C(t) = \int \dot{C}(t)\, dt = \int t \cos t\, dt = t \sin t + \cos t + c.$$

Die allgemeine Lösung ist somit von der Form

$$x(t) = t \sin t \cos t + \cos^2 t + c \cos t, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Aus $2 = x(0) = 1 + c$ folgt schliesslich $c = 1$.

Siehe nächstes Blatt!

6. **a)** Es ist $\underline{x} = A^{-1}A\underline{x}$, also

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+9 \\ -2+6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist $\det A = \left(\det A^{-1}\right)^{-1}$, wobei

$$\det A^{-1} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 6 = 18,$$

und für

$$B := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt $\det B = (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6$. Also ist

$$\begin{aligned} \det\left(3AB^2\right) &= \det(3A)\det B^2 = 3^3 \det A \,(\det B)^2 \\ &= 27\left(\det A^{-1}\right)^{-1}(\det B)^2 = \frac{27 \cdot 36}{18} = 54. \end{aligned}$$

7. **a)** Es ist

$$\det A = 2\begin{vmatrix} -1 & a \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & a \end{vmatrix} = 2(-3-a) + a + 2 = -4 - a,$$

also $\det A = 0$ nur für $a = -4$. Mit dieser Wahl von a sind die Spaltenvektoren von A notwendigerweise komplanar. Z.B. gilt

$$4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}. \qquad (\dagger)$$

b) Das Gleichungssystem besitzt genau dann eine Lösung, wenn der Vektor $\underline{b}$ ebenfalls in der von den Spaltenvektoren von A aufgespannten Ebene liegt. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & \beta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & \beta \end{vmatrix} = 2(-1-\beta) + \beta + 2 = -\beta$$

Bitte wenden!

verschwindet, d.h. für $\beta = 0$. Wegen (†) ist dann offenbar

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad C \in \mathbb{R}, \tag{‡}$$

die Lösungsschar. Das Gleichungssystem hat also

i) keine Lösung für $\beta \neq 0$ und
ii) die Lösungsschar (‡) für $\beta = 0$.

Alternativ folgt mit dem Gaußverfahren

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 0 & \beta \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & \beta+2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right),$$

woraus sich ebenfalls die Bedingung $\beta = 0$ und die Lösungsschar (‡) ergibt.

8. **a)** Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (2+a)\lambda + 2a - 1.$$

Insbesondere ist $\chi_A(3) = 9 - 3(2+a) + 2a - 1 = 2 - a = 0$ nur für $a = 2$.

b) Mit $a = 2$ ist $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$. Die Eigenwerte von A sind dann

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1,$$

also $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$.

Für die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \underline{v}_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{v}_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Aus $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ folgt schliesslich

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1, \\ c_1 - c_2 &= 3, \end{aligned} \qquad \text{also} \qquad c_1 = 2, \quad c_2 = -1.$$

9. **a)** Der Einheitskreis $S^1 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$ wird durch

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi, \tag{$\star$}$$

parametrisiert. Wegen $z = f(x,y) = xy$ is also

$$t \mapsto \gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \sin t \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi, \tag{$\star\star$}$$

eine parametrisierung der Schnittkurve C.

b) Wegen

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist der Sattelpunkt im Ursprung der einzige kritische Punkt von f.

Die globalen Extremstellen von f liegen somit auf dem Rand S^1. Mit der Parametrisierung ($\star$) ergibt sich für die Punkte $(x(t), y(t)) \in S^1$

$$\begin{aligned} f(x(t), y(t)) = \varphi(t) := \cos t \sin t &= \frac{1}{2} \sin(2x) && \text{mit} \\ \varphi'(t) = -\sin^2 t + \cos^2 t &= 2\cos^2 t - 1 && \text{und} \\ \varphi''(t) = -4 \cos t \sin t &= -2 \sin(2t). \end{aligned}$$

Die Funktion φ besitzt die Extrema $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ und nimmt diese in den Punkten

$$t_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

an, wobei

$$\varphi''(t_k) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} -2 & \text{für } k = 0, 2 \text{ und} \\ 2 & \text{für } k = 1, 3. \end{cases}$$

Die Funktion f nimmt auf $\mathbb{E}$ also

- das Maximum $\frac{1}{2}$ in den Punkten $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$ und

Bitte wenden!

- das Minimum $-\frac{1}{2}$ in den Punkten $(\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2)$ an.

c) Mit der Parametrisierung $(\star\star)$ ergeben sich

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2\cos^2 t - 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ \cos t \sin t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\int_C F\, d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2\cos^2 t - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \cos t \sin t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2 t + \cos^2 t + 2\cos^3 t \sin t - \cos t \sin t\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(2t)\, dt + 2\int_0^{2\pi} \cos^3 t \sin t\, dt - \int_0^{2\pi} \cos t \sin t\, dt \\ &= \left(\frac{\sin(2t)}{2} - \frac{\cos^4 t}{2} + \frac{\cos^2 t}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Alternativ sieht man auch leicht ein, dass

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dy}z - \frac{d}{dz}x \\ \frac{d}{dz}y - \frac{d}{dx}z \\ \frac{d}{dx}x - \frac{d}{dy}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und da der Definitionsbereich von F einfach zusammenhängt, ist F ein Potentialfeld (ein Potential ist z.B. durch $\phi(x,y,z) = xy + \frac{z^2}{2}$ gegeben). Insbesondere verschwindet die Arbeit von F entlang jedes geschlossenen Weges.

10. a) $\mathcal{F}$ ist die Niveaufläche der Funktion

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2$$

zum Niveau 36. Die Tangentialebene an $\mathcal{F}$ im Punkt (x_0, y_0, z_0) ist offenbar genau dann parallel zur Ebene $3x + 2y + 2z - 3 = 0$, wenn die beiden Normalenvektoren $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ und $(3,2,2)^T$ kolinear sind, d.h.

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 6x_0 \\ 4y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aus

$$x_0 = \frac{\lambda}{2}, \qquad y_0 = \frac{\lambda}{2} \qquad \text{und} \qquad z_0 = \lambda$$

Siehe nächstes Blatt!

folgt
$$36 = f(x_0, y_0, z_0) = 3\,\frac{\lambda^2}{4} + 2\,\frac{\lambda^2}{4} + \lambda^2 = \frac{9}{4}\,\lambda^2,$$
also $\lambda^2 = 16$ bzw. $\lambda = \pm 4$. Die Tangentialebene zu $\mathcal{F}$ ist also genau in den Punkten $(\pm 2, \pm 2, \pm 4)$ zur Ebene $3x + 2y + 2z - 3 = 0$ parallel.

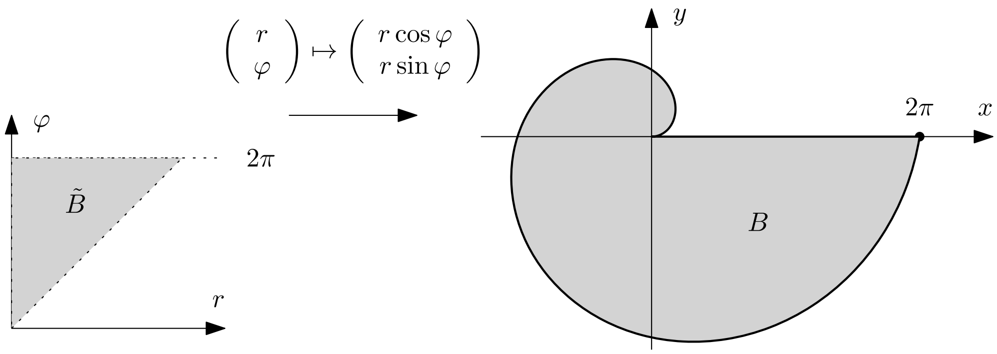
b) Es ist
$$g(x, y) = z = \sqrt{36 - 3x^2 - 2y^2}$$
mit
$$\nabla g(x, y) = \frac{1}{2\,g(x, y)} \begin{pmatrix} -6x \\ -4y \end{pmatrix}, \qquad \text{also insbesondere}$$
$$\nabla g(1, 2) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{25}} \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$
Die Richtungsableitung wird daher minimal in Richtung
$$-\nabla g(1, 2) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
und hat in dieser Richtung den minimalen Wert $-|\nabla g(1, 2)| = -1$.

11. a) Es ist
$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - x \\ y - y \\ z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
und da der Definitionsbereich von F einfach zusammenhängt, ist F ein Potentialfeld. Ein Potential ist etwa durch $\varphi(x, y, z) = xyz$ gegeben.

b) Die Schnittpunkte sind
$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad \gamma(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Nach **a)** entspricht die Arbeit also der Differenz
$$\varphi(1, 0, 1) - \varphi(1, 0, 0) = 0 - 0 = 0.$$
Alternativ ergibt sich auch direkt
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{t}{2\pi} \sin t \\ \frac{t}{2\pi} \cos t \\ \cos t \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \frac{1}{2\pi} \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} t \cos(2t)\, dt + \int_0^{2\pi} \cos t \sin t \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(2t \sin(2t) + \cos(2t) - 2\cos^2 t \right)\Big|_{t=0}^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Bitte wenden!

12. In Polarkoordinaten



entspricht dieser Bereich B offenbar $\tilde{B} = \{\, (r,\varphi) \in (0,\infty) \times (0,2\pi) \,|\, 0 < r < \varphi \,\}$.

Daher ist

$$\begin{aligned} \iint_B dx\,dy = \iint_{\tilde{B}} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^2}{2} \right|_{r=0}^{\varphi} d\varphi \\ = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2\,d\varphi = \frac{1}{6}\, \varphi^3 \Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{4\pi^3}{3}. \end{aligned}$$