Lösungsskizze Ferienserie

1. **a)** g definiert für alle a_1, a_2 eine Bilinearform. Für $a_1 = 5$ ist A symmetrisch und damit g symmetrisch (Wieso?). Damit g ein Skalarprodukt definiert, muss A positiv-definit sein. Die Determinante von A ist linear in a_2, insbesondere existiert ein $c \in \mathbb{R}$ (≈ 2.8) an dem A für $a_2 = c$ singulär ist (ein Eigenwert=0). Für $a_2 > c$ sind alle Eigenwerte positiv und damit ist A positiv definite. (Ermittlung von a_2 ist natürlich keine Examsfrage!)

b) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Die Matrixdarstellung von g bezüglich $\mathcal{B}$ ist $G = A$. Der Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}^g$ ist also durch die Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ gegeben (explizit angeben, Invertieren etwa mit Gaussverfahren – unbedingt üben!). Die Koordinaten von den Basisvektoren $\mathcal{B}^g$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ kann man als die Zeilen von A^{-1} ablesen. Der Basiswechsel von zwei reziproken Basen ist kontravariant und damit von $\mathcal{B}^g$ nach $\mathcal{C}^g$ durch L^{-1} gegeben (wieder explizit berechnen, Basisvektoren von $\mathcal{C}^g$ bezüglich $\mathcal{C}$ angeben).

d) Für kovarianten Koordinaten eines Vektors ist nach der Darstellung in der reziproken Basis gefragt. Direkt herleiten oder Formel aus dem Skript verwenden: $[v]^T_{\mathcal{B}^G} = G[v]_{\mathcal{B}}$ (Konvention im Skript: kovariante Vektoren sind als Zeilenvektoren geschrieben (und $[v]_{\mathcal{B}}$ hätte auf dem Aufgabenblatt als Spaltenvektor geschrieben werden sollen). Analog für $[v]_{\mathcal{C}^g}$ oder die Formel vom Basiswechsel $\mathcal{B}^g$ nach $\mathcal{C}^G$ nutzen (die ja kovariant ist, also Multiplikation von $[v]_{\mathcal{B}^g}$ mit L!

2. Bemerkung: Diese Aufgabe untersucht einen komplexen(!) Vektorraum. Gegebenfalls Rechenregeln für $i \in \mathbb{C}$ repetieren! Ausserdem ist ein inneres Produkt nicht mehr symmetrisch um Positivität zu erzeugen: Wir definieren (für $\mathcal{B}$ orthogonal für g, $g(v,w) = \sum v^k \overline{w}^k$. Die zusätzliche Konjugation bewirkt, dass $g(v,v) = \|v\|^2 \geq 0$. Darum definieren wir dann $c_m = \sum_j \exp(2\pi(m-1)(j-1))b_j$, so dass die Basis $\mathcal{C}$ die wir hier verwenden wollen, die konjugierte Version der Basis die auf dem Aufgabenblatt angebeben wurde, ist.

a) Wir schreiben $c_m = \sum_j e(j,m)b_j$ für $e(j,m) = \exp\left(\frac{2\pi i(m-1)(j-1)}{n}\right)$. Dann gilt für $v = v^i b_i$ per Definition, dass $f(v)^k = \sum_m v^m e(-k,m)$. Also

$$g(v, c_k) = \sum_j v^i \overline{e(j,k)} g(b_i, b_j) = \sum_j e(-j,k) v^j = f(v)^k$$

da g orthonormal bezüglich $\mathcal{B}$ angenommen wurde und $e(j,k) = e(k,j)$. Weil g orthonormal bezüglich $\tilde{\mathcal{C}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{C}$ ist, gilt $[v]^j_{\tilde{\mathcal{C}}} = g(v, \frac{1}{\sqrt{n}}c_j) = \frac{1}{\sqrt{n}} f(v)^j$, also

$$v = \frac{1}{\sqrt{n}} f(v)^k \frac{1}{\sqrt{n}} c_k = \frac{1}{n} f(v)^k c_k.$$

(Achtung, Fehler in der Aufgabenstellung!)

Please turn over!

b) Anhand der Definition liest man direkt ab, dass $[f]_{\mathcal{B}} = (e(j,m)^{-1}_{jm})$. Betrachte $\Lambda = L^{-1}_{\mathcal{CB}}$, dann $[v]_{\mathcal{C}} = \Lambda[v]_{\mathcal{B}}$, und wegen $[v]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{n}f(v)$, $\Lambda = \frac{1}{n}[f]_{\mathcal{B}}$.

c) Für $n = 3$ ist

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 \end{pmatrix}$$

wobei $\zeta = \exp\left(\frac{-2\pi i}{3}\right)$ ist die dritte Einheitswurzel, mit der Eigenschaft, dass $\zeta^3 = 1$ und damit $\zeta^4 = \zeta$. Es gilt weiter $\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$ (zum Beispiel via geometrische Reihe), so dass $\zeta^2 = -1 - \zeta$. Mit dieser Vereinfachung, kann man das charakteristische Polynom $\det([f]_{\mathcal{B}} - \lambda\mathbb{1})$ schreiben als

$$-\lambda^3 + (2\zeta + 1)\lambda^2 + 3\lambda - (6\zeta + 3).$$

Da $\zeta = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$, vereinfacht sich der Ausdruck weiter zu

$$-\lambda^3 - \sqrt{3}i\lambda^2 + 3\lambda + 3\sqrt{3}i = (\lambda^2 - 3)(-\lambda - i\sqrt{3})$$

mit Nullstellen $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -i\sqrt{3}$. Eine Eigenbasis kann dann via einem Linearen Gleichungssystem ermittelt werden.

3. **a)** $\tilde{T}^{ij}_{klm} = \Lambda^i_q \Lambda^j_w L^r_k L^s_l L^t_m \tilde{T}^{qw}_{rst}$. $(1,0), (1,1), (1,2), (4,1)$ Tensoren analog.

b) Q nein. R ja. S ja. T nein. (wir verwenden die Konvention, dass nur summiert wird, wenn der selbe Index oben und unten erscheint).

c) Nein,Ja,Nein. da $(1,1)$ Tensor

4. Siehe Kapitel 6.3

a) $\varepsilon^S_{ij} = \varepsilon_{ij} - \mathrm{spur}(\varepsilon_{ij})\delta_{ij}/3$ und $\varepsilon^U_{ij} = \mathrm{spur}(\varepsilon_{ij})\delta_{ij}/3$

b) T ist symmetrisch, damit $T_{ij} = \varepsilon_{ij}$ und $\omega_{ij} = 0$.

c) Eigenwert und Eigenbasis Problem.

d) Formel aus a) verwenden und einsetzen.

e) Beide $= 0$, da der Rotationstensor verschwindet. Mit Winkel ist hier die Norm vom Rotationsvektor gemeint, mit Achse die Richtung vom Vektor.