Serie 1

1. Sei $V < \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$ der Vektorraum der 2×2 Matrizen mit Spur gleich 0.

a) Zeige, dass V wirklich ein Vektorraum ist und bestimme die Dimension.

b) Zeige, dass

$$\mathcal{B} = \left(b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

und

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left(\tilde{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Basen von V sind.

c) Berechne die Basistransformation L von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$.

d) Sei $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mit Determinante gleich 1 und definiere eine lineare Abbildung $\psi : V \to V$ durch $m \mapsto gmg^{-1}$. Berechne die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$. Was ist der Zusammenhang beider bezüglich L?

2. Gegeben seien die zwei Basen von $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

a) Sei $v = (-24, 8, 19)^T$ ein Punkt in $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardbasis. Was ist der Koordinatenvektor $[v]_{\mathcal{B}}$ von v bezüglich $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$?

b) Sei $w \in \mathbb{R}^3$ mit $[w]_{\tilde{\mathcal{B}}} = (1, 2, 3)^T$. Bestimme die Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}$!

3. Betrachte die Differentialgleichung

$$f''(x) + f(x) = 0$$

und sei W der Raum aller komplexwertiger Lösungen.

a) Zeige das W ein Vektorraum ist. Welcher Dimension hat er über $\mathbb{R}$ respektive über $\mathbb{C}$?

b) Finde die zwei 'natürlichen' Basen von W.

c) Gib eine Basis für den Unterraum von W bestehend aus allen reellwertigen Lösungen

Please turn over!

d) Sei $g(x) = e^{-ix} + \sin x$ Element von W. Gib die Koordinatenvektoren von g bezüglich der zwei Basen aus Teilausgabe b) an.

Remark: Die Übungen sind auf Deutsch und finden jeweils am Dienstag von 8:45-9:30 auf dem Höngerberg statt. Es gibt zwei Gruppen eingeteilt nach Nachnamen: A-J: HIT F 31.1 (Florian Zeiser) und K-Z: HIT F 32 (Felix Krauth). Die Serien können ins Fächlein im HG J68 gelegt werden.

Abgabetermin: 25.02.2014 während den Übungen.