Lösungen 10

1. **a)** Gegen sei die Basis $\{\beta^i\}$ von V^*. Dann ist per definition $S^{ij} = \sigma(\beta^i, \beta^j)$, und somit folgt unmittelbar, dass

$$S^{ij} = \sigma(\beta^i, \beta^j) = \sigma(\beta^j, \beta^i) = S^{ji} \text{ für } \sigma \in \mathrm{Sym}(V \otimes V)$$

und

$$S^{ij} = \sigma(\beta^i, \beta^j) = -\sigma(\beta^j, \beta^i) = -S^{ji} \text{ für } \sigma \in \mathrm{Anti}(V \otimes V).$$

b) Nehme $\{b_i\}$ die Basis von V zu der $\{\beta^j\}$ die Dualbasis ist. Dann ist insbesondere auch $\{b_i \otimes b_j\}$ eine Basis von $V \otimes V$. Nehme $\sigma \in \mathrm{Sym}(V \otimes V)$, dann schreiben wir

$$\sigma = S^{ij} b_i \otimes b_j = \frac{1}{2}(S^{ij} b_i \otimes b_j + S^{ji} b_j \otimes b_i) = \frac{1}{2}(S^{ij} b_i \otimes b_j + S^{ij} b_j \otimes b_i) = \frac{1}{2} S^{ij}(b_i \otimes b_j + b_j \otimes b_i)$$

Bemerke, dass die Tupel (i, j) und (j, i) das gleiche Element definieren. Wir können also die Summe einschränken auf $\{(i, j) : i \leq j\}$ und müssen dafür jedem S^{ij} das doppelte Gewicht geben, d.h.

$$\sigma = \sum_{i \leq j} S^{ij}(b_i \otimes b_j + b_j \otimes b_i).$$

Damit folgt, dass $b_i \otimes b_j + b_j \otimes b_i$ den Raum $\mathrm{Sym}(V \otimes V)$ aufspannen. Lineare Unabhängigkeit könnten wir direkt nachrechnen, aber wir werden ein einfacheres Dimensionsargument geben. Dazu müssen wir zumächst zeigen, dass $b_i \otimes b_j - b_j \otimes b_i$ den Vektorraum $\mathrm{Anti}(V \otimes V)$ aufspannen. Dies passiert analog zu eben,

$$\sigma = S^{ij} b_i \otimes b_j = \frac{1}{2}(S^{ij} b_i \otimes b_j + S^{ji} b_j \otimes b_i) = \frac{1}{2}(S^{ij} b_i \otimes b_j - S^{ij} b_j \otimes b_i) = \frac{1}{2} S^{ij}(b_i \otimes b_j - b_j \otimes b_i)$$

und wir bemerken, dass die Elemente zu den Tupel (i, j) und (j, i) linearabhängig sind (nämlich Vielfaches von -1) und (i, i) gänzlich verschwindet, so dass wir auf $\{(i, j) : i < j\}$ einschränken können:

$$\sigma = \sum_{i < j}(b_i \otimes b_j - b_j \otimes b_i).$$

Nun gibt es $n + (n-1) + \cdots + 1$ Elemente der Form $b_i \otimes b_j + b_j \otimes b_i$ für $i \leq j$ und $(n-1) + (n-2) + \cdots + 0$ Elemente der Form $b_i \otimes b_j - b_j \otimes b_i$ für $i < j$. Dies sind jeweils $\frac{1}{2}n(n+1)$ respektive $\frac{1}{2}n(n-1)$ Elemente (Formel vom kleinen Gauss), also zusammen $n^2 = \dim(V \otimes V)$-viele. Wenn wir jetzt zeigen, dass $b_i \otimes b_j + b_j \otimes b_i$ zusammen mit $b_i \otimes b_j - b_j \otimes b_i$ den gesamten Raum $V \otimes V$ aufspannen, folgt aus der Dimensionsrechnung, dass sie eine Basis bilden müssen und damit insbesondere die lineare Unabhängigkeit beider Teilsysteme. Aber dies sehen wir unmittelbar aus

$$b_i \otimes b_j = \frac{1}{2}\left((b_i \otimes b_j + b_j \otimes b_i) + (b_i \otimes b_j - b_j \otimes b_i)\right).$$

c) Wir verwenden wieder, dass Dimension mit der Kardinalität einer (jeder) Basis übereinstimmt, also $\frac{1}{2}n(n+1)$ respektive $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Please turn over!

d) Jeder Tensor wird eindeutig als eine Summe der $b_i \otimes b_j$ beschrieben, welche wiederum in der Formel von oben,

$$b_i \otimes b_j = \frac{1}{2}\left((b_i \otimes b_j + b_j \otimes b_i) + (b_i \otimes b_j - b_j \otimes b_i)\right).$$

zerlegt wird. Eindeutigkeit letzterer Zerlegung kann mit mittels folgendem Standardtrick zeigen: Für einen Tensor σ seien $\sigma = S + A$, $\sigma = S' + A'$ zwei Zerlegungen mit $S, S' \in \mathrm{Sym}(V \otimes V)$ und $A, A' \in \mathrm{Anti}(V \otimes V)$. Dann folgt aus $S + A = S' + A'$ insbesondere $S - S' = A - A'$. Da $\mathrm{Sym}(V \otimes V)$ und $\mathrm{Anti}(V \otimes V)$ Vektorräume sind, muss ist $S - S' = S - S' = A - A'$ symmetrisch und antisymmetrisch sein, also $S - S' = A - A' = 0$ und damit $S = S'$ und $A = A'$.

2. Zunächst eine Bemerkung bezüglich dem Hoch- und Runterholen von Indizes. Wir haben gesehen, dass wenn wir eine Metrik g gegeben haben, es einen kanonischen Isomorphismus zwischen V und V^* gibt definiert durch

$$v \mapsto (w \mapsto g(w, v)).$$

Wählen wir eine Basis $\mathcal{B} = \{b_j\}$ von V, dann haben wir mit $\mathcal{B}^g = \{b^j\}$ die zu $\mathcal{B}$ reziproke Basis bezüglich g bezeichnet, welche eindeutig durch die Eigenschaft $g(b_i, b^j) = \delta_i^j$ definiert ist. Weiterhin haben wir gesehen, dass $\mathcal{B}^g$ explizit durch

$$b^j = g^{ji} b_i$$

gegeben ist, wobei g^{ij} die Einträge der Inverse der Darstellungsmatrix (g_{ij}) von g bezüglich $\mathcal{B}$ bezeichnen. Diese Operation können wir auch mit einem beliebigen Vektor (oder allgemeiner Tensor) durchführen: Für einen Vektor v mit Koordinaten v^j bezüglich $\mathcal{B}$, können wir den Index runterziehen und $v_i = v^j g_{ij}$ definieren. Diese sind natürlich gerade die kovarianten Koordinaten von v, sprich die Koordinaten von v bezüglich der reziproken Basis $\mathcal{B}^g$. Analog können wir auch einen Index hochholen. Ist jetzt $\mathcal{B}$ eine orthogonale Basis, dann $\mathcal{B}^g = \mathcal{B}$ und $g_{ij} = \delta_{ij}$, so dass $v_i = \delta_{ij} v^j = v^i$. Nehmen wir weiter $V = \mathbb{R}^n$, dann sind die Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 eine Orthogonalbasis zum Standardskalarprodukt $\bullet$. Dann

$$v \bullet w = \sum_k w^k v^k = \delta_{kj} w^k v^j = w_j v^j$$

gibt mit obigem Kommentar eine effiziente Schreibweise für $v \bullet w$ in Koordinaten.

Wir erinnern an die Definition: ε_{ij}^k ist 1, wenn (i, j, k) eine gerade Zyklus von $(1, 2, 3)$ ist (also von der Form $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ oder $(3, 1, 2)$) -1 wenn (i, j, k) eine ungerade Permutation von $(1, 2, 3)$ ist ($(1, 3, 2)$,$(2, 1, 3)$,$(3, 2, 1)$) und 0 wenn ein Index doppelt vorkommt. In Formeln können wir das Kreuzprodukt verwenden:

$$\varepsilon_{ij}^k = (e_i \times e_j)^k,$$

so dass insbesondere

$$(v \times w)^k = v^i w^j (e_i \times e_j)^k = v^i w^j \varepsilon_{ij}^k.$$

was wir später benützen. Andererseits, betrachten wir später auch den Ausdruck

$$v^i w^j - w^j v^i.$$

Bemerke, dass dieser verschwindet, wenn $i = j$. Ist $(i, j) = (1, 2)$, dann

$$v^1 w^2 - w^2 v^1 = (v \times w)^3.$$

See next page!

Falls $(i,j) = (2,1)$, dann $v^2w^1 - w^1v^2 = -(v \times w)^3$. Diese drei Fälle lassen sich damit auch schreiben als

$$v^iw^j - w^jv^i = (v \times w)^3 \varepsilon_3^{ij}.$$

Analog natürlich die anderen Fälle $(2,3)$ und $(3,1)$, so dass

$$v^iw^j - w^jv^i = (v \times w)^k \varepsilon_k^{ij}.$$

a) Wir bemerken, dass eine gerader Zykel, also die Abbildung $(i,j,k) \mapsto (j,k,i)$ das Permutationszeichen erhält, d.h. wenn (i,j,k) von der Form $(1,2,3)$,$(2,3,1)$,$(3,1,2)$ ist, dann ist auch (j,k,i) von der Form. Analog für wenn (i,j,k) ungerade ist. Ist ein Index doppelt von (i,j,k), dann klarer Weise auch von (j,k,i), so dass

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki}.$$

Für Gleichheit mit ε_{kij} wenden wir den vorigen Paragraphen auf (j,k,i) an.

Für die Indentität $\varepsilon_{ij}^k = -\varepsilon_{ji}^k$ bemerken wir, dass dies eine einfache Permutation $(i,j) \mapsto (j,i)$ ist, und damit das Zeichen der Permutation (i,j,k) umdreht (Prüfe: Vertauschen (genau) zweier Stellen von $((1,2,3)$,$(2,3,1)$,$(3,1,2))$ gibt ein Element aus $((1,3,2)$,$(2,1,3)$,$(3,2,1))$ und vice versa.

Die Antisymmetrie des Kreuzproduktes folgt nun aus letzter Identität und Linearität von $\times$.

b)

$$\det A = A_1^1(A_2^2A_3^3 - A_3^2A_2^3) - A_2^1(A_1^2A_3^3 - A_3^2A_1^3) + A_3^1(A_1^2A_2^3 - A_2^2A_1^3)$$

$$= \varepsilon^{123}A_1^1A_2^2A_3^3 + \varepsilon^{132}A_1^1A_3^2A_2^3 + \varepsilon^{213}A_2^1A_1^2A_3^3 + \varepsilon^{231}A_2^1A_3^2A_1^3 + \varepsilon^{312}A_3^1A_1^2A_2^3 + \varepsilon^{321}A_3^1A_2^2A_1^3 = \varepsilon^{ijk}A_i^1A_j^2A_k^3.$$

Oder direkt Leibniz' Formel verwenden.

c) Wir wollen zeigen, dass

$$u \times v \bullet x \times y = \det \begin{pmatrix} u \bullet x & u \bullet y \\ v \bullet x & v \bullet y \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben zunächst die linke Seite aus:

$$u \times v \bullet x \times y = u^kv^lx^iy^j(e_k \times e_l)^n\delta_{nm}(e_i \times e_j)^m = u^kv^lx^iy^j\varepsilon_{kl}^n\varepsilon_{ij}^m\delta_{nm} = u^kv^lx^iy^j\varepsilon_{kl}^n\varepsilon_{ijn}.$$

Für die rechte Seite bekommen wir,

$$u^kx^n\delta_{kn}v^ly^m\delta_{lm} - v^ix^n\delta_{in}u^jy^m\delta_{jm} = u^k(x^n\delta_{kn}v^ly^m\delta_{lm} - v^ix^n\delta_{in}y^m\delta_{km})$$

$$= u^kv^l(\delta_{kn}x^ny^m\delta_{lm} - x^n\delta_{ln}y^m\delta_{km}) = u^kv^l(x_ky_l - x_ly_k) = u^kv^l(x \times y)^n\varepsilon_{kln} = u^kv^lx^iy^j\varepsilon_{ij}^n\varepsilon_{kln}$$

und damit Gleichheit beider Seiten.