Lösungen 12

1. Zunächst ist

$$(a \times (b \times c))^k = a^i (b \times c)^j \varepsilon^k_{ij} = a^i b^m c^n \varepsilon^j_{mn} \varepsilon^k_{ij}.$$

Wir müssen also den Term $\varepsilon^j_{mn}\varepsilon^k_{ij} = \varepsilon_{jmn}\varepsilon^j_{ki}$ verstehen. Wir behaupten, dass

$$\varepsilon_{jmn}\varepsilon^j_{ki} = \delta_{km}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{im}.$$

Fixiere dafür zunächst $n \neq m$ (sonst ist die Summe $= 0$). Der einzige Summand der $\neq 0$, ist damit für $j \neq \{n, m\}$ und damit $\{n, m\} = \{i, k\}$. Ist weiterhin ε_{jmn} positiv (negativ), dann ist ε^j_{ki} genau dann positiv (negativ) wenn $(m, n) = (k, i)$ und negativ (positiv) wenn $(m, n) = (i, k)$. Also ist $\varepsilon_{jmn}\varepsilon^j_{ki}$ ungleich null, wenn $m \neq n$ und $i \neq k$. Der nicht-verschwindene Term erfüllt dann automatisch $\{m, n\} = \{i, k\}$ und ist positiv, wenn $(m, n) = (k, i)$ und negativ wenn $(m, n) = (i, k)$.

Andererseits ist $\delta_{km}\delta_{in} = 1$ wenn $(m, n) = (k, i)$ und analog $-\delta_{kn}\delta_{im} = -1$ falls $(m, n) = (i, k)$. Da wegen $m \neq n$ kann nur einer der beiden Fälle eintreten, so dass der Ausdruck $\delta_{km}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{im}$ mit $\varepsilon_{jmn}\varepsilon^j_{ki}$ übereinstimmt.

Wir setzen also ein:

$$(a \times (b \times c))^k = a^i b^m c^n \delta_{km}\delta_{in} - a^i b^m c^n \delta_{kn}\delta_{im} = b_k a^i c_i - c_k a^i b_i = (b(a \bullet c) - c(a \bullet b))^k.$$

2. **a)** Dünner Stab: Wir wählen das Koordinatensystem, so dass der Stab entlang der z-Achse verläuft. Wir vernachlässigen die Dicke des Stabs – und können folglich $x = y = 0$ in der Berechnung von I annehmen. Da der Koordinatenursprung im Körperschwerpunkt angenommen wird, bekommen wir, mit Dichte $\frac{m}{l}$

$$I_{11} = I_{22} = \frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2} z^2 dz = \frac{m}{l}\frac{2}{3}\frac{l^3}{8} = m\frac{l^2}{12}$$

und

$$I_{33} = I_{ij} = 0$$

für $i \neq j$, da $x = y = 0$. Insbesondere sind die x, y, z-Achsen damit die Hauptträgheitsachsen mit Hauptträgheitsmomenten $\{m\frac{l^2}{12}, m\frac{l^2}{12}, 0\}$.

b) Ball: Wir legen den Mittelpunkt des Balls in den Koordinatenursprung und nehmen sphärische Koordinaten, also

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\vartheta$$

wobei r die Distanz vom Koordinatenursprung, φ den Winkel auf der $x-y$-Achse und ϑ den Winkel von der z-Achse bezeichnet (siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten). Wie notieren, dass $x^2 + y^2 = r^2\sin\vartheta^2$, $x^2 + z^2 = r^2(\sin\vartheta^2\cos\varphi^2 + \cos\vartheta^2)$ und $y^2 + z^2 =$

$r^2(\sin\vartheta^2\sin\varphi^2+\cos\vartheta^2)$. Wir verwenden dann, dass $\int_0^{2\pi}\sin\varphi^2 d\varphi=\pi$, $\int_0^{\pi}\sin\vartheta^3 d\vartheta=\frac{4}{3}$ und $\int_0^{\pi}\sin\vartheta\cos\vartheta^2 d\vartheta=\frac{2}{3}$. Der erste Diagonaleintrag ist dann (mit $\varrho=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$)

$$I_{11}=\varrho\int_0^R r^2dr\int_0^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi r^2(\sin\vartheta^2\sin\varphi^2+\cos\vartheta^2)$$

$$=\varrho\frac{R^5}{5}\left(\int_0^{\pi}\sin\vartheta^3 d\vartheta\int_0^{2\pi}\sin\varphi^2 d\varphi+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\vartheta\cos\vartheta^2 d\vartheta\right)$$

$$=\varrho 2R^5\frac{1}{5}(\pi 4/3+2\pi 2/3)=\frac{2}{5}mR^2.$$

Aus Punktsymmetrie der Kugel folgt, dass wir die Kugel beliebig drehen können (also ein Basiswechsel via einer orthogonalen Matrix P) können und der Trägheitstensor invariant bezüglich dieser Drehungen bleiben muss. In Koordinaten also

$$PIP^{-1}=I.$$

Die einzige Matrix für die diese Gleichung für alle $P\in O_3(\mathbb{R})=\{P:P^{-1}=P\}$ gelten kann, ist ein skalares Vielfache der Identitätsmatrix $\operatorname{diag}(c,c,c)$ (Drehungen wirken transitiv auf der Kugel!). Es folgt, dass

$$I=\operatorname{diag}(\frac{2}{5}mR^2,\frac{2}{5}mR^2,\frac{2}{5}mR^2).$$

Alternativ hätten wir auch die anderen Komponenten analog wie I_{11} berechnen können.

c) Zylinder: Wir erinnern an die Berechnung einer Scheibe von Radius R aus der letzten Serie die wir auf die $x-y$-Ebene gelegt haben. Nun betrachten wir zusätzlich die z-Achse auf der wir die Höhe $[-h/2,h/2]$ des Zylinders abmessen. Wir nutzen Radialkoordinaten bezüglich der $x-y$-Ebene, also $x=r\cos\varphi$ und $y=r\sin\varphi$ und damit ist das Volumenelement $dV=rdrd\varphi dz$. Wir haben weiterhin $\varrho=m/(\pi R^2h)$ Wegen $\int_0^{2\pi}\sin\varphi^2 d\varphi=\pi$ rechnen wir

$$I_{11}=\varrho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R rdr\int_{-h/2}^{h/2}dz(y^2+z^2)=\varrho(\frac{R^4}{4}\pi+\frac{2(\frac{h}{2})^3}{3}\frac{R^2}{2}2\pi)=\frac{m}{4}(R^2+\frac{h^2}{3}).$$

Aus Rotationssymmetrie in der $x-y$-Ebene folgt wieder

$$I_{22}=I_{11}\text{ und }I_{12}=I_{21}=0$$

wie in der Analyse der Kugel. Der Eintrag I_{33} stimmt gerade mit dem aus der Scheibe überein,

$$I_{33}=\frac{1}{2}mR^2$$

(überlege dir das!). Es bleiben noch die Terme $I_{13}=I_{31}$ und $I_{23}=I_{32}$ zu denen die Integrale $\int xzdV$ respektive $\int yz$ gehören. Nun sehen wir wieder, dass das Integral $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}zdz$ über die z-Achse symmetrisch ist und verschwindet, wenn man über z integriert. Also sind alle Nebendiagonaleinträge $=0$ und wir bekommen

$$I=\operatorname{diag}(\frac{m}{4}(R^2+\frac{h^2}{3}),\frac{m}{4}(R^2+\frac{h^2}{3}),\frac{1}{2}mR^2).$$

See next page!

d) Ellipsoid. Wir nehmen also an, dass die Halbachsen der Längen a, b, c auf den Koordinatenachsen x, y, z liegen. Dann können wir die angepassten sphärischen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar\sin\vartheta\cos\varphi \\ br\sin\vartheta\sin\varphi \\ cr\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

betrachten. Man rechnen jetzt analog wie im sphärischen Fall, wobei $R = 1$ gewählt wird, und wir zusätzliche quadratische Terme der Streckungsfakotren a,b und c bekommen:

$$I = \frac{m}{5}\operatorname{diag}(b^2 + c^2, a^2 + c^2, a^2 + b^2).$$

3. Diese Aufgabe ist das 3-dimensionale Analog der Aufgabe aus Serie 11. Wie wählen ein Koordinatensystem, dass wieder der Geometrie des Quaders K angemessen ist, naemlich $K = [-a/2, a/2] \times [-b/2, b/2] \times [-c/2, c/2]$ bezüglich der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$. Dann ist der Körperschwerpunkt $s = \int_Q r dxdydz$=0 (mit r =Abstand zum Mittelpunkt).

Der Trägheitstensor lässt sich ganz analog ausrechnen wir zur Platte mit Unterschied, dass jetzt $z \neq 0$

$$I_{11} = \frac{m}{abc}\int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{\frac{-c}{2}}^{\frac{c}{2}}(y^2 + z^2) = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$

$$I_{22} = \frac{m}{abc}\int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{\frac{-c}{2}}^{\frac{c}{2}}(x^2 + z^2) = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$$

$$I_{33} = \frac{m}{abc}\int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{\frac{-c}{2}}^{\frac{c}{2}}(x^2 + y^2) = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

und wieder $I_{ij} = 0$ für $i \neq j$, da die Integrale der Form $\int x_i x_j$ für $x_i, x_j \in \{x, y, z\}$ gerade Stammfunktionen haben, und sich damit über die symmetrischen Intervalle $[-k, k]$ verschwinden.

a) Die Standardbasis bildet also ein Hauptachsensystem für Q und die Werte I_{ii} sind die Hauptachsenmomente.

b) Die Gleichung ist

$$q^i I_{ij} q^j = q^1 I_{11} + q^2 I_{22} + q^3 I_{33} = \frac{m}{12}\left(q^1(b^2 + c^2) + q^2(a^2 + c^2) + q^3(a^2 + b^2)\right) = 1$$

c) Die kinetische Energie ist $E = \frac{1}{2}w^i w^j I_{ij}$ wenn ω den Roationsvektor mit Winkelgeschwindigkeit $|\omega|$ bezeichnet. Die Drehachse zeigt entlang einer der Diagonalen durch den Schwerpunkt, zum Beispiel $p = (a, b, c)$. normalisiert kriegen wir $\hat{w} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, b, c)$, $\omega = |\omega|\hat{\omega}$. Einsetzen gibt

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\frac{m}{12}\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}|\omega|^2\left(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2a^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + c^2b^2\right) \\ &= \frac{m}{12}\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}|\omega|^2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) \end{aligned}$$

d) $L^j = I^j_i \omega^i$ so dass

$$L = \frac{m}{12}\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}|\omega|\begin{pmatrix} a(b^2 + c^2) \\ b(a^2 + c^2) \\ c(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$