Lösungen 13

1. **a)** Ist der Tensor σ in einer orthonormal Basis $\{e^1, \dots, e^3\}$ mit der Darstellungsmatrix σ^{ij} gegeben, so definieren wir die Spur

$$\operatorname{spur}(\sigma) = \sigma^{ij}\delta_{ij} = \sigma^i_i.$$

Da sich σ um ein Spannungstensor handelt, ist $\sigma(v, w) = \sigma(w, v)$ bzw. $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$. Das Spektraltheorem besagt, dass eine symmetrische Matrix A diagonalisierbar ist bezüglich einer orthogonalen Transformation O (bezüglich dem Standardskalarprodukt), also $OAO^{-1} = D$ für eine Diagonalmatrix mit Einträgen σ_i und O besitzt die Eigenschaft, dass orthogonale Vektoren wieder zu orthogonalen Vektoren abgebildet werden (und damit $O^T = O^{-1}$). Es folgt, dass wenn wir den Basiswechsel O vornehmen, der Tensor σ in der Basis $\{Oe^1, \dots, Oe_3\}$ die gleichen Eigenwerte besitzt wie für die usprünglice Basis. Damit ist die Spur unabhängig von der Wahl (der orthogonal) Basis und die Dekomposition in Scherungstransformation und hydrostatischem Druck ebenso: Definiere $\sigma_S = \sigma - \frac{1}{3}\operatorname{spur}(\sigma)\mathbb{1}$, dann ist σ_S wegen Linearität der Spur $\operatorname{spur}(\sigma_S) = \operatorname{spur}(\sigma) - 3\frac{1}{3}\operatorname{spur}(\sigma) = 0$ eine Scherungstransformation und $\sigma_P = \frac{1}{3}\operatorname{spur}(\sigma)\mathbb{1}$ hat offensichtlich gleiche Hauptspannungen $\frac{1}{3}\operatorname{spur}$.

b) Wir schreiben das charakteristische Polynom aus,

$$\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda - 39\lambda + 28.$$

Wir raten die Nullstelle $\lambda_1 = 1$ und reduzieren dann via Polynomdivision durch $(\lambda - 1)$ auf das quadratische Polynom $\lambda^2 - 11\lambda + 28$ mit Nullstellen $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 7$. Die Hauptspannungen sind also $\{1, 4, 7\}$. Für die Hauptspannungsrichtungen lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} v_\lambda = \lambda v_\lambda$$

für $\lambda \in \{1, 4, 7\}$. Wir rechnen v_1 aus:

- $5(v_1)_1 - 2(v_1)_2 = (v_1)_1$
- $-2(v_1)_1 + 4(v_1)_2 - 2(v_1)_3 = (v_1)_2$
- $-2(v_1)_2 + 3(v_1)_3 = (v_1)_3$.

Die erste und dritte Gleichung ist equivalent zu $2(v_1)_1 = (v_1)_2 = (v_1)_1$, so dass wir $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ wählen können. Analog findet man $v_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $v_7 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Diese Vektoren stehen orthogonal aufeinander und man kann sie noch normalisieren um eine orthonormal Basis zu bilden.

c) Wie bereits bemerkt, ist die Spur Basisunabhängig, und damit die Summe der Eigentwerte $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 12$. Wir definieren also wie oben $\sigma_S = \sigma - 4\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ und $\sigma_P = 4\mathbb{1} = \operatorname{diag}(4, 4, 4)$.

Please turn over!

2. **a)** Sei also L der Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$. Da wir den Tangentialraum T_0 über die Kurven γ_i (respektive η_i) definiert haben, müssen wir diese verstehen: Weil $e_i = L_i^j b_j$ ist $\eta_i(t) = te_i = L_i^j(tb_j) = L_i^j \gamma_j(t)$ und wegen Linearität

$$\eta_i'(0) = L_i^j \gamma_j'(0).$$

Es folgt, dass L auch die Darstellungsmatrix von $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\}$ nach $\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \frac{\partial}{\partial y^2}\}$ ist.

b) Das $\mathrm{grad}(f)$ kovariant ist, folgt direkt aus der Kettenregel:

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}(0) = \frac{df \circ \eta_i}{dt}(0) = \frac{df(L_i^j \gamma_j)}{dt}(0) = L_i^j \frac{\partial f}{\partial x^i}(0).$$

Alternativ per Definition der Differentiale $d\bullet$: Ist dy^i die Dualbasis von $\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \frac{\partial}{\partial y^2}\}$, dann gilt $dy^i(\frac{\partial}{\partial y^j}) = \delta_j^i$ und daher (wenn $\Lambda = L^{-1}$)

$$dy^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = dy^i(\Lambda_j^k \frac{\partial}{\partial y^k}) = \Lambda_j^k \delta_k^i = \Lambda_j^i.$$

Es folgt, dass

$$dy^i = \Lambda_j^i dx^j.$$

Also

$$\mathrm{grad}(f)_0 = \frac{\partial f}{\partial y^i}(0) dy^i = \frac{\partial f}{\partial y^i}(0) \Lambda_j^i dx^j.$$

Andererseits ist

$$\mathrm{grad}(f)_0 = \frac{\partial f}{\partial x^j}(0) dx^j$$

so dass wegen Eindeutigkeit der Koeffizienten

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}(0) \Lambda_j^i = \frac{\partial f}{\partial x^j}(0)$$

bzw. equivalent dazu

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}(0) = L_i^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(0).$$

Abschliessend bemerken wir, dass im Allgemeinen auch nicht lineare Koordinatentransformationen auf M vorgenommen werden können, also in der Abbildung $y^i e_i = y^i L_i^j b_j = x^j b_j$ im Allgemeinen die Matrix L_i^j vom Wert y^j abhängt. Wir schreiben dann $x^j(y_1, y_2)$ und es gilt

$$\eta_i'(0) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \gamma_j'(0),$$

so dass der Basiswechsel von $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\}$ nach $\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \frac{\partial}{\partial y^2}\}$ durch die Matrix $(\frac{\partial x^i}{\partial y^j})$ gegeben ist und dann zu der "intuitiven" Formel

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$$

führt.