Prof. Alessandra Iozzi

Lösungen 1

- 1. a) $\operatorname{Mat}_{2x2}(\mathbb{R})$ ist sicher ein 4 dimensionaler Vektorraum (schreibe die Matrix als Vektor). Wir sehen ausserdem, dass $V = \ker \operatorname{tr}$. Die Spur ist eine Linearform, also nach dem Bild/Kern-Satz muss V 3-dimensional sein.
 - b) Zu prüfen ist, dass die gegebenen Matrizen linear unabhängig sind. Dies ist trivial.
 - c) Nach der Vorlesung ist L definiert, so dass folgende Gleichung gilt:

$$(\tilde{b}_1 \ \tilde{b}_2 \ \tilde{b}_3) = (b_1 \ b_2 \ b_3)L,$$

oder equivalent dazu,

$$\tilde{b}_1 = b_1$$
 $\tilde{b}_2 = -b_2 + b_3$ $\tilde{b}_3 = b_2 + b_3$

und somit

$$L = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

d) Erst die Rechnung bezüglich \mathcal{B} : Sei $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{bmatrix}$ mit Koordinaten $[x]_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, x_3)$ bezüglich \mathcal{B} . Dann (da ad - bc = 1)

$$\psi(x) = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} d & -b \\ -c & a \end{array} \right].$$

Wir rechnen und bekommen

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} (ad+bc)x_1 - acx_2 + bdx_3 & -2abx_1 + a^2x_2 - b^2x_3 \\ 2cdx_1 - c^2x_2 + d^2x_3 & -[(ad+bc)x_1 - acx_2 + bdx_3] \end{bmatrix}.$$

Also

$$[\psi(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (ad+bc)x_1 - acx_2 + bdx_3 \\ -2abx_1 + a^2x_2 - b^2x_3 \\ 2cdx_1 - c^2x_2 + d^2x_3 \end{pmatrix}$$

was wir auch als Matrixprodukt schreiben können

$$[\psi(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} ad + bc & -ac & bd \\ -2ab & a^2 & -b^2 \\ 2cd & -c^2 & d^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

und uns somit die Matrixdarstellung für \mathcal{B} gibt.

Für $\tilde{\mathcal{B}}$ können wir die Rechnung wiederholen und bekommen als Matrixdarstellung von ψ bzgl. $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$\begin{bmatrix} ad + bc & ac + bd & -ac + bd \\ -2(ab + cd) & -a^2 - b^2 - c^2 - d^2 & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \\ 2(ab - cd) & a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & -a^2 + b^2 + c^2 - d^2 \end{bmatrix}$$

2. a) Wir rechnen zuerst die Transformationsmatrix L bzgl der Standardbasis \mathcal{E} und \mathcal{B} aus. Es gilt per Definition

$$(b_1 \ b_2 \ b_3) = (e_1 \ e_2; e_3)L$$

also $L=(b_1\ b_2\ b_3)$. Damit $[v]_{\mathcal{B}}=\Lambda[v]_{\mathcal{E}}=L^{-1}(-24,8,19)^T$. Nach langem Rechnen bekommen wir

$$L^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 & -5 & -15 \\ 21 & -7 & -30 \\ 29 & -8 & -40 \end{bmatrix}$$

und somit $[v]_{\mathcal{B}} = (-113, -226, 304)^T$. Weil wir die Transformationsmatrix von $\tilde{\mathcal{B}}$ nach \mathcal{B} brauchen für Aufgabe b), rechnen wir diese schon aus. Es muss gelten

$$\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$$

also $L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} = \mathcal{B}^{-1}\tilde{\mathcal{B}}$ wobei \mathcal{B}^{-1} die Inverse der Matrix $(b_1\ b_2\ b_3)$ bezeichnen soll - und somit obigem L entspricht! Also

$$L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 & -5 & -15 \\ 21 & -7 & -30 \\ 29 & -8 & -40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

und dessen Inverse ist

$$\Lambda = \left[\begin{array}{rrr} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

also

$$[v]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \Lambda[v]_{\mathcal{B}} = (643, 1173, 643)^T$$

- **b)** $[w]_{\mathcal{B}} = \Lambda^{-1}[w]_{\tilde{\mathcal{B}}} = L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(1,2,3)^T = (-5,-10,-11)$
- 3. a) Es ist bekannt, dass es zwei unabhängige komplexe L
sungen gibt, also $\dim_{\mathbb{C}}=2$ und damit $\dim_{\mathbb{R}}=4$.
 - **b)** $\{\cos x, \sin x\}$ und $\{e^{ix}, e^{-ix}\}$ über \mathbb{C} .
 - c) $\{\cos x, \sin x\}$ über \mathbb{R}
 - d) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ und damit $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$. Also hat g bezüglich der zweiten Basis Koordinatenvektor $(0,1)^T + \frac{1}{2}(1,1)^T = (\frac{1}{2},\frac{3}{2})$. Bezüglich der ersten Basis schreiben wir wieder $e^{-ix} = \cos x i \sin x$ also $[g]_{\{\cos,\sin\}} = (1,-i)^T + (0,1) = (1,1-i)^T$. Wir hätten die Basis natürlich auch über $\mathbb R$ angeben können.