Serie 2

1. **a)** Schreibe die Koordinaten der folgenden Ausdrücke mittels der Einsteinschen Summenkonvention. Dabei seien x,y (Spalten-)Vektoren und A,B Matrizen.

- $x^T y$
- $x^T A y$
- $(B^T x)^T A$

b) Sei $A_{ij} = i - j$. Zeige, dass $A_{ij} x^i x^j = 0$ gilt.

c) Welche Ausdrücke machen Sinn?

- $L^{ij} K_{ij} = B^m$
- $M_{nm} W^{nm} = N$
- $L^{ij} \Gamma_{jk} = A^i_j$
- $A^{ijk}_{lmn} B^{abc} = C$

d) Schreibe folgende Ausdrücke explizit aus! δ bezeichnet wie immer das Kronecker Symbol.

- $\delta^i_j a^j$
- $\delta_{ij} x^i x^j$
- δ^i_i
- $\frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j$

2. Gegeben seien die zwei Basen von $\mathbb{R}^3$ von Serie 1

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Sei ψ eine lineare Abbildung mit Matrixdarstellung bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben durch

$$\psi_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Matrix von ψ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$.

Please turn over!

3. Sei $V < \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum bestehend aus allen reellen Polynomen vom Grad 3 oder kleiner. Betrache folgende Basis

$$\big(p_1 = x^3 + 6x;\ p_2 = x^2 - x + 2;\ p_3 = 2x^2 + x + 4;\ p_4 = -3x + 1\big)$$

Bestimme die Darstellungsmatrix der Differenziation

$$\frac{d}{dx} : V \to V, p \mapsto p'.$$

4. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und definiere das Kreuzprodukt (bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2, e_3)) wie folgt:

$$V \times V \to V \qquad (u, v) \mapsto u \times v = \begin{pmatrix} u^2v^3 - u^3v^2 \\ u^3v^1 - u^1v^3 \\ u^1v^2 - u^2v^1 \end{pmatrix}.$$

Das **Levi – Civita – Symbol** ist bezüglich der Standardbasis wie folgt definiert:

$$\varepsilon_{ij}^k = (e_i \times e_j)^k$$

für $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

a) Berechne ε_{ij}^k!

b) Zeige, dass $\times$ eine bilineare Abbildung ist.

c) Überprüfe, dass $(u \times v)^k = \varepsilon_{ij}^k u^i v^j$.

Abgabetermin: 4. März 2014.