Lösungen 2

1. **a)** $x_i y^i$; $x_i A^i_j y^j$; $x_k B^k_i A^i_j$

b) Die Einträge $i = j$ verschwinden in $A_{ij} x^i x^j$ da $A_{ii} = 0$. Für ein paar (i, j), $i \neq j$ kommt für jeden Term $(i - j)x^i x^j$ auch der Ausdruck $(j - i)x^j x^i$ die sich gegenseitig wegheben.

c)
1. Ja. Summation über i und j. Da m auf der linken Seite nicht vorkommt, ist B^m konstant.
2. Ja. Summation über n und m.
3. Nein, links wird über j summiert mit i und k freien Indizies. Auf der reichten Seite sind aber i und j freie Indizies.
4. Ja. Keine Summation, d.h. alle Indizies sind frei - aber der Tensor ist konstant.

d)
1. a_i
2. $\sum_i (x^i)^2$
3. $\sum_i 1 = n$ falls $i = 1 \dots n$
4. $\sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j$.

2. Bezeichne A die Matrixdarstellung von ψ. Dann wenn L die Basistransformation von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$ ist, müssen wir $L^{-1}AL$ berechnen. Für L haben wir per Definition $\tilde{B} = BL$ wobei wir für B (resp $\tilde{B}$) die Matrix meinen, wenn man die Basisvektoren von $\mathcal{B}$ (resp $\tilde{B}$) nebeneinander schreiben also

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dessen Inverse ist

$$L^{-1} = \Lambda = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit

$$L^{-1}AL = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & -3 \\ 7 & 11 & -7 \end{bmatrix}.$$

3. Wir rechnen zu erst, was mit den Basisvektoren unter dem Differenzieren passiert:

$$p_1' = 3x^2 + 6 = p_2 + p_3$$

$$p_2' = 2x - 1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}p_3 - p_4$$

$$p_3' = 4x + 1 = -\frac{14}{3}p_2 + \frac{7}{3}p_3 + p_4$$

Please turn over!

$$p_4' = -3 = 6p_2 - 3p_3 - 3p_4$$

Also ist die Matrix von $p \mapsto p'$ gegeben durch

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & -14/3 & 6 \\ 1 & -1/3 & 7/3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Alternativ hätten wir auch erst die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis $(1, x, x^2, x^3)$ berechnen knnen und dann die Basistransformationsformel anwenden können.

4. **a)** $\varepsilon_{ij}^k = 1$ falls (i, j, k) eine gerade Permutation der Zahlen $\{1, 2, 3\}$, $\varepsilon_{ij}^k = -1$ falls es eine ungerade Permutation ist, und $\varepsilon_{ij}^k = 0$ sonst (i.e. falls ein Index zweimal vorkommt)

b) Durch explizites ausrechnen zeigt man $(\mu u + u') \times v = \mu(u \times v) + u' \times v$ und $v \times (\mu u + u') = \mu(v \times u) + v \times u'$

c) Wir nutzen, dass $\varepsilon_{23}^1 = 1$ und $\varepsilon_{32}^1 = -1$ und damit

$$(u \times v)^1 = u^2 v^3 - u^3 v^2 = \varepsilon_{23}^1 u^2 v^3 + \varepsilon_{32}^1 u^3 v^2 = \varepsilon_{ij}^1 u^i v^j$$

gilt, wobei die letzte Gleichheit stimmt, weil ε_{ij}^1 verschwindet für i, j gleich 1 und wenn $i = j$. Analog für $(u \times v)^2$ und $(u \times v)^3$