Serie 4

1. Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

v_1, v_2, v_3 definieren eine Basis $\mathcal{B}$. Bestimme die Koordinatenvektoren $[\beta^i]_{\mathcal{E}^*}$ der Dualbasis $\{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$ von $\mathcal{B}$ bezüglich der Basis $\mathcal{E}^* = \{\varepsilon^i\}$ von $(\mathbb{R}^3)^*$ definiert durch $\varepsilon^i(x) = x^i$ für $x = (x^1, x^2, x^3)^T \in \mathbb{R}^3$.

2. Bezeichne $V = \mathbb{R}[X]_2$ den Vektorraum der reellen Polynome vom Grade kleiner gleich 2. Definiere folgende Linearformen auf V,

$$\beta^1 : \begin{array}{l} V \to \mathbb{R} \\ p \mapsto p(0) \end{array} \qquad \beta^2 : \begin{array}{l} V \to \mathbb{R} \\ p \mapsto p'(0) \end{array} \qquad \beta^3 : \begin{array}{l} V \to \mathbb{R} \\ p \mapsto \frac{1}{2}p''(0) \end{array}$$

a) Bestimme die Basis $\mathcal{B}$ von V welche $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$ als zugehörige Dualbasis besitzt.

b) Gegeben sei eine weitere Form $\omega \in V^*$,

$$\omega : \begin{array}{l} V \to \mathbb{R} \\ p \mapsto \int_0^1 p(y)dy. \end{array}$$

Bestimme den Koordinatenvektor $[\omega]_{\mathcal{B}^*}$ von ω bezüglich $\mathcal{B}^*$.

c) Sei $\mathcal{A} = \{x+1, x-1, x^2+1\}$ eine weitere Basis von V. Bestimme die Dualbasis $\mathcal{A}^*$.

d) Bestimme die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}^*$ nach $\mathcal{A}^*$ (Sei vorsichtig, diese nicht mit der Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{A}$ zu verwechseln!)

e) Gebe $[\omega]_{\mathcal{A}^*}$ an.

3. Seien v,$w \in \mathbb{R}^2$ zwei Vektoren in der Ebene. Zeige, dass $v \bullet w := |v||w| \cos\vartheta = v_1w_1 + v_2w_2$, wobei ϑ den Winkel der zwischen den Vektoren v und w eingespannt ist, bezeichnet. Wähle dafür zunächst eine Basis $\{b_1, b_2\}$von $\mathbb{R}^2$, so dass v auf der von b_1 gespannten gerade liegt. Verwende nun die Definition des Kosinus $\cos\vartheta = \frac{b}{c}$ wobei b die Länge Ankathete und c die Länge der Hypotenuse im Dreieck definiert durch Punkte $\underline{0}$, v und w im $\mathbb{R}^2$ bezeichnen.

Abgabetermin: 18. März 2014.