Serie 5

1. Gegeben seien die Vektoren

$$\mathcal{B} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zeige das $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ definiert und berechne die Dualbasis bezüglich $\mathcal{B}$ von $(\mathbb{R}^3)^*$.

2. Sei $V < \mathbb{R}^3$ der Teilvektorraum von $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Punkten $(x^1, x^2, x^3)^T$ (bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$), so dass

$$x^1 + x^2 + x^3 = 0.$$

a) Zeige, dass V ein Vektorraum von Dimension 2 ist.

b) Seien $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ und $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$ wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zwei Basen von V. Berechne die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$.

c) Sei $e_3 = (0, 0, 1)^T$. Wir erweitern $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ zu Basen von $\mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{B}_3 = \{b_1, b_2, e_3\} \quad \tilde{\mathcal{B}}_3 = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, e_3\}.$$

Die Dualbasis bezüglich $\mathcal{B}_3$ und $\tilde{\mathcal{B}}_3$ definieren auch eine Dualbasis $\mathcal{B}^*$ respektive $\tilde{\mathcal{B}}^*$ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ von V^*. Gebe diese bezüglich den Koordinatenformen von $\mathbb{R}^3$ an!

d) Sei $\omega \in (\mathbb{R}^3)^*$ definiert durch $\omega(x^1, x^2, x^3) = x^1 + x^2$. Berechne die Koordinatenvektoren $[\omega]_{\mathcal{B}^*}$ und $[\omega]_{\tilde{\mathcal{B}}^*}$ bezüglich $\mathcal{B}^*$ respektive $\tilde{\mathcal{B}}^*$.

3. Sei W der Dualraum von $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten W als eigenständigen Vektorraum bestehend aus allen linearen Funktionen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Definiere $x \bullet y = \sum_i x_i y_i$ das Standard-skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Sei weiter

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eine symmetrische Matrix und definiere die Vektoren

$$w_j : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ v \mapsto v \bullet Ae_j \end{array},$$

wobei e_j den j'sten Standardbasisvektor von $\mathbb{R}^3$ bezeichne.

Please turn over!

a) Zeige, dass $\{w_1, w_2, w_3\}$ eine Basis von W definiert: Da $\dim W = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, reicht es zu zeigen, dass für eine beliebige Linearkombination $\omega = c^k \omega_k$ für die $\omega = 0$ gilt, auch $c^k = 0$ für alle k folgt. Verwende, dass $\omega = 0$ inbesondere $\omega(v) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$ impliziert.

b) Sei

$$\begin{aligned} v_j : \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ & v \mapsto v \bullet e_j \end{aligned}$$

eine weitere Basis von W. Schreibe $\{\omega^j\}$ für die Dualbasis bezüglich $\{w_j\}$ und $\{\eta^j\}$ für die Dualbasis bezüglich $\{v_j\}$ von W^* . Bestimme die Koordinatenvektoren von $\{\eta^j\}$ bezüglich $\{\omega^j\}$

Abgabetermin: 25. März 2014.