Lösungen 5

1. Wegen Kontravarianz der Dualbasis müssen wir L^{-1} berechnen, wobei

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & -12 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

die Transformationsmatrix von der Standardbasis nach $\mathcal{B}$ bezeichnet. Man rechnet

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{15} & \frac{1}{20} & -\frac{7}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{20} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{45} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{45} \end{pmatrix}$$

und kann die Koordinatenvektoren der Dualbasis $\mathcal{B}^*$ als Zeilen dieser Matrix ablesen.

2. **a)** Man kann leicht 2 lineare unabhängige Vektoren finden (zB die aus Aufgabe b)) womit $\dim V \geq 2$. Andererseits, ist $(1,0,0)$ sicher nicht in V, so dass $\dim V < \dim \mathbb{R}^3 = 3$ gilt. Wir schliessen, dass $\dim V = 2$.

b) Die Transformationsmatrix L ist definiert durch

$$(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) = (b_1, b_2)L,$$

oder equivalent,

$$\tilde{b}_i = b_1 L_i^1 + b_2 L_i^2.$$

Nach Definition von $V = \{(x^1, x^2, x^3) : x^1 + x^2 + x^3 = 0\}$ ist für ein Vektor $v \in V$ die dritte Koordinate bereits durch die ersten beiden bestimmt, so dass wir das Gleichungssystem etwas vereinfachen und die dritte Koordinate vergessen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} L$$

also

$$L = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

c) Wir ergänzen $\mathcal{B}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ mit $e_3 = (0,0,1)$. Bemerke, dass es keine kanonische Wahl des dritten Vektors gibt, also die Dualbasis des Unterraums von dieser Wahl bahängt. Dann wissen wir, dass die Koordinaten der Dualbasis von $\{b_1, b_2, e_3\}$bezüglich der Dualbasis der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ durch die Zeilen der Inversematrix von (b_1, b_2, e_3) gegeben ist, also die Zeilen der Matrix

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 2/6 & 2/6 & 0 \\ 2/6 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Please turn over!

also können wir $\beta^1 = 1/6(2,2,0)$ und $\beta^2 = 1/6(2,-1,0)$ wählen, wobei die Koordinaten bezüglich den Standardkoordinatenformen ε^j angegeben sind. Analog rechnen wir die Matrix bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$ aus und bekommen

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit die Koordinatenvektoren $(2,3,0)$ und $(-1,-2,0)$.

d) Mit obiger Wahl der Dualbases wollen wir die Koordinaten von $\omega = \varepsilon^1 + \varepsilon^2$ angeben. Diese sind

$$(1,1,0)\Lambda_i^{-1}$$

wegen dem kovarianten Verhalten von Linearformen. Wir bekommen $[\omega]_{\mathcal{B}^*} = (3,0,0)$ und $[\omega]_{\tilde{\mathcal{B}}^*} = (1,1,0)$

3. a) Nehme an, dass $\omega = c^k\omega_k = 0$, damit also für alle $v \in \mathbb{R}^3$

$$\sum c^k v \bullet Ae_k = 0$$

gilt. Wir bemerken zunächst, dass weil A symmetrisch ist, also $A = A^T$, gilt

$$v \bullet Ae_k = A^T v \bullet e_k = Av \bullet e_k.$$

Nehmen wir $v = v_j = A^{-1}e_j$, dann $v_j \bullet Ae_k = \delta_{jk}$ und somit $0 = \sum c^k v_j \bullet Ae_k = c^j$, was zeigt, dass ω_k linear unabhängig sind und eine Basis definieren.

b) Wir wollen zunächst die Transformationsmatrix L berechnen, die den Basiswechsel von $\{v_j\}$ nach $\{w_j\}$ definiert und demnach durch die Formel

$$(w_1, w_2, w_3) = (v_1, v_2, v_3)L$$

gegeben ist. Es ist nützlich die Spaltenvektoren von A als $\{a_j\}$ zu bezeichnen, so dass diese die Koeffizienten $(a_j)^k = A_j^k$ haben, also $a_j = A_j^k e_k$. Damit

$$w_j : x \mapsto x \bullet Ae_j = x \bullet a_j = x \bullet A_j^k e_k = A_j^k x \bullet e_k = A_j^k v_k = v_k A_j^k$$

und wir schliessen, dass $L = A$. Die Dualbasis ist dem kontravarianten Transformationsgesetz unterstellt, also

$$\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = L^{-1} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix}$$

und schliesslich

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}.$$