Lösungen 6

1. **a)** Für $m \in V$ schreiben wir $m = m^{ij}E_{ij}$ in der Standardbasis bestehend aus Elementarmatrizen E_{ij}. Die Dualbasis $\{\varepsilon^{lk}\}$ bezüglich $\mathcal{E}$ sind dann genau die Koordinatenformen, also $\varepsilon^{lk}(m) = m^{lk}$ gibt die Komponente von m in der l'ten Zeile und k'ten Spalte. Da die Spur die Summe der Komponenten auf der Diagonale bildet, haben wir Spur $= \sum_l \varepsilon^{ll}$.

b) Wir berechnen zuerst $\beta^i(m)$ für $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\beta^1(m) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a - b - c + d$$
$$\beta^2(m) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a + b - c - d$$
$$\beta^3(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a - b + c - d$$
$$\beta^4(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a + b + c + d$$

Für eine beliebige Linearkombination $\alpha = c_i\beta^i$ setzen wir nun für m die Elementarmatrizen E_{lk} ein, so dass wir

$$\alpha(E_{11}) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \tag{1}$$
$$\alpha(E_{12}) = -c_1 + c_2 - c_3 + c_4 \tag{2}$$
$$\alpha(E_{21}) = -c_1 - c_2 + c_3 + c_4 \tag{3}$$
$$\alpha(E_{22}) = c_1 - c_2 - c_3 + c_4 \tag{4}$$

bekommen. Mit der Annahme, dass $\alpha = 0$ die 0-Abbildung ist, bekommen wir mit den richtigen Linearkombinationen von Zeile (1) bis Zeile (4), dass alle c_i verschwinden müssen. Zum Beispiel für c_1 und c_4:

$$(1) + (2) + (3) + (4) = 4c_4 = 0$$
$$(1) + (4) - (2) - (3) = 4c_1 = 0$$

und analog für c_2 und c_3.

c) Wir erinnern uns, dass wir Linearformen als Zeilenvektoren auffassen und wenn L die Transformationsmatrix der Basis $\mathcal{E}$ zur Basis $\mathcal{B}$ (welche wir noch nicht bestimmt haben), dann (wenn wir die Matrix $m = (m_{ij})$ als Vektor $(m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22})$ schreiben)

$$\begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \\ \beta^4 \end{pmatrix} = L^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 \\ \varepsilon^4 \end{pmatrix}$$

Please turn over!

gilt. Allerdings können wir die die Koordinaten von β^i bezüglich $\mathcal{E}^*$ auch direkt ablesen von der ersten Rechnung, also dass

$$\begin{aligned}\beta^1 &= \varepsilon^{11} - \varepsilon^{12} - \varepsilon^{21} + \varepsilon^{22}\\ \beta^2 &= \varepsilon^{11} + \varepsilon^{12} - \varepsilon^{21} - \varepsilon^{22}\\ \beta^3 &= \varepsilon^{11} - \varepsilon^{12} + \varepsilon^{21} - \varepsilon^{22}\\ \beta^4 &= \varepsilon^{11} + \varepsilon^{12} + \varepsilon^{21} + \varepsilon^{22}\end{aligned}$$

oder equivalent,

$$\begin{pmatrix}\beta^1\\ \beta^2\\ \beta^3\\ \beta^4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon^1\\ \varepsilon^2\\ \varepsilon^3\\ \varepsilon^4\end{pmatrix}.$$

Die gegebene Matrix ist also L^{-1}. Wir bemerken, dass wenn wir jeder Spalte mit $1/2$ multiplizieren, die Spaltenvektoren orthonormal aufeinander stehen, und somit $1/2L^{-1}$ eine orthogonale Matrix bildet. Für diese wissen wir, dass die Inverse gerade die Transponierte ist, und können also gerade ablesen, dass

$$L = \frac{1}{2}(L^{-1})^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$$

Alternativ hätten wir natürlich auch einfach die Inverse direkt ermitteln können. Da Linearformen sich Kovariant verhalten, ist $[\mathrm{Spur}]_{\mathcal{B}^*} = [\mathrm{Spur}]_{\mathcal{E}^*}L$ und damit

$$[\mathrm{Spur}]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

d) Wir wissen, dass wenn $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ dann

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = L(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

also

$$b_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, b_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$
$$b_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, b_4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

2. a) Zunächst bemerken wir, dass das Kreuzprodukt eine bilineare Abbildung definiert,

$$(u + \lambda v) \times (w + \sigma x) = u \times w + \sigma u \times x + \lambda x \times w + \lambda\sigma v \times w.$$

Weiter ist das Spatprodukt φ die Komposition der Linearform $\varphi_u : w \mapsto u \bullet w$ mit dem Kreuzprodukt $(v, w) \mapsto v \times w$. Die Komposition linearer Abbildung ist wieder linear, also wird Linearität in den beiden Argumenten des Kreuzprodukts auf φ vererbt. Schliesslich ist auch die Abbildung $V \to V^*$, $u \mapsto \varphi_u$ linear, so dass man Linearität in jedem der drei Variablen folgert.

See next page!

b) Der Beweis hängt von der Definition die man für die Determinantenabbildung ab. Sei $V = \mathbb{R}^3$

- $\det : V^3 \to \mathbb{R}$ kann als eindeutig (bis auf skalares Vielfache) definierte Trilinearform definiert werden die alternierend ist, sprich $\det(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}) = \operatorname{sign}\sigma \det(v_1, v_2, v_3)$ für eine Permutation σ. Man prüft, dass wegen Symmetrie des Skalarproduktes $\bullet$ und Antisymmetrie vom Kreuzprodukt $\times$ das Spaltprodukt ebenfalls diese Eigenschaft hat. Da det und das Spatprodukt die Identitätsmatrix auf 1 Abbilden, definieren sie also die gleiche Trilinearform.
- Alternativ nutzt man die Leibnisformel: Für die Matrix definiert aus den Vektoren u, v, w gilt, dass

$$\begin{aligned}\det(u, v, w) &= u^1v^2w^3 - u^1v^3w^2 - u^2v^1w^3 + u^2v^3w^1 - u^3v^1w^2 + u^3v^2w^1 \\ &= u^1(v^2w^3 - v^3w^2) - u^2(v^1w^3 - v^3w^1) - u^3(v^1w^2 - v^2w^1) \\ &= u \bullet v \times w\end{aligned}$$

c) Nutzt man erstere Definition von Aufgabe b), ist det per Definition multilinear. Nutzt man die Leibnisformel (oder allgemein die Regeln zur Berechnung von det via Unterdeterminanten "Laplacescher Entwicklungssatz"), entwickle man zuerst nach der Spalte, für die man Linearität zeigen will.

3. a) Wir schreiben die Koordinaten von einer Matrix A als A_{ij}, so dass

$$(AB)_{ij} = A_{ik}B_{kj}$$

wobei wir implizit über k summieren. Da $A^T_{ij} = A_{ji}$, haben wir

$$\operatorname{Spur}(A^TB) = A_{ki}B_{ki}$$

mit Summation über k und i. Aus dieser Formel lesen wir sofort Symmetrie zwischen A und B ab, da $A_{ki}B_{ki} = B_{ki}A_{ki}$ und auch Bilinearität: Ist C eine weiter Matrix und $\lambda \in \mathbb{R}$ dann

$$(\lambda A + C)_{ki}B_{ki} = \lambda A_{ki}B_{ki} + C_{ki}B_{ki}.$$

b) Nummerieren wir die Basis $\mathcal{E}$ neu, sprich $\mathcal{E} = \{E_k\}$ wobei die Reihenfolge wie in Aufgabe 1 gewählt ist, also wir erst entlang der 1. Zeile laufen und dann entlang der 2. Zeile. Die Matrix einer Bilinearform β bzgl. einer Basis $\mathcal{E} = \{E_k\}$ ist definiert als $B_{ij} = \beta(E_i, E_j)$. Für die Spur ist es am einfachsten, direkt $E_i^TE_j$ auszurechnen und die Summe der Diagonalelemente zu nehmen. Aus den 16 Kombinationen sehen wir, dass es auf der Diagonale von E_iE_j nur Einträge geben kann, wenn beide $i = j = 1$ und $i = j = 4$, oder wenn $i = 2, j = 3$ und $j = 2, i = 3$. Wir erkennen, dass wir dazu auch equivalent $E_i^T = E_j$ sagen können. Weil wir in der Spur transponieren, also statt E_iE_j das Produkt $E_i^TE_j$ betrachten, und $E_2^T = E_3$ und $E_3^T = E_2$ gilt, bekommen wir

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

die Identitätsmatrix.

c) Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass sich eine Bilinearform kovariant verhält und die Formel $\tilde{B} = L^TBL$ haben, wenn L die Transformationsmatrix vom Basiswechsel ist. Also ist die Koordinatenmatrix $\tilde{B}$ der Spur bezüglich $\mathcal{B}$ die Matrix $\tilde{B} = L^T\mathbb{1}L = L^TL$. Wir haben gesehen, dass L bis auf Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ orthogonal ist, also $L^TL = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\mathbb{1} = \frac{1}{4}\mathbb{1}$ gilt.