Lösungen 8

1. **a)** Schreiben wir $\mathcal{B}$ in Koordinaten bezüglich den Monoman x^k, und stellen diese (Spalten)-Vektoren als Matrix da

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren in $\mathcal{B}$ bilden eine Basis genau dann wenn sie linear unabhängig sind, was wiederum genau dann wenn passiert wenn B regulär ist – und damit equivalent das $\det B \neq 0$. Wir rechnen und bekommen $\det B = 3$ und $\mathcal{B}$ bildet eine Basis.

b) Zunächst berechnen wir die Vektoren

$$a_1 = p_1, \quad a_2 = p_2 - g(p_2, a_1)a_1, \quad a_3 = p_3 - g(p_3, a_1)a_1 - g(p_3, a_2)a_2$$

$$a_4 = p_4 - g(p_4, a_1)a_1 - g(p_4, a_2)a_2 - g(p_4, a_3)a_3$$

die orthogonal aufeinander stehen und definieren danach

$$\tilde{B} = \{q_i = a_i/\sqrt{g(a_i, a_i)}\}.$$

$a_1 = x$**:** $a_1 = p_1$

$a_2 = x^2 + 2$**:** Wir sehen auf ohne Rechnung, dass $g(p_2, a_1) = \int_{-1}^{1}(x^2+2)xdx = 0$ da alle Grade innerhalb des Integranten ungerade sind, aber $\int_{-1}^{1} x^{2n+1}dx \equiv 0$ für alle n gilt.

$a_3 = x^3 - \frac{14}{3}x^2 + \frac{4}{15}x - \frac{25}{3}$**:**

$$g(a_1, p_3) = \int_{-1}^{1} x^4 + 2x^2 + xdx = \frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{26}{15}$$

$$g(a_2, p_3) = \int_{-1}^{1}(x^3+2x+1)(x^2+2)dx = \int_{-1}^{1} x^5+2x^3+2x^3+4x+x^2+2 = \int_{-1}^{1} x^2+2 = \frac{2}{3}+4 = \frac{14}{3}$$

$$a_3 = x^3 + 2x + 1 - \frac{26}{15}x - \frac{14}{3}(x^2+2) = x^3 - \frac{14}{3}x^2 + \frac{4}{15}x - \frac{25}{3}$$

$a_4 \approx -5.19x^3 + 28.67x^2 - 1.72x + 49.15$**:**

$$g(a_1, p_4) = \int_{-1}^{1} x^4 + x^3 + x^2 = \frac{16}{15}$$

$$g(a_2, p_4) = \int_{-1}^{1} x^5 + x^4 + x^3 + 2x^3 + 2x^2 + 2x = \frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{18}{15}$$

$$g(a_3, p_4) = \int_{-1}^{1} x^6 + \frac{4}{15}x^4 - \frac{14}{3} - \frac{25}{3}x^2 + x^4 + \frac{4}{15}x^2 = \frac{2}{7} + \frac{-82}{75} - \frac{242}{45} = \alpha$$

$$a_4 = x^3 + x^2 + x - \frac{16}{15}x - \frac{18}{15}(x^2+2) + \alpha(x^3 - \frac{14}{3}x^2 + \frac{4}{15}x - \frac{25}{3})$$

$$= (1+\alpha)x^3 + (1 - \frac{18}{15} - \frac{14}{3}\alpha)x^2 + (1 - \frac{16}{15} + \frac{4}{15}\alpha)x + (-\frac{36}{15} - \frac{25}{3}\alpha) \approx -5.19x^3 + 28.67x^2 - 1.72x + 49.15$$

Please turn over!

$$\|a_1\|^2 = 1.5 \quad \|a_2\|^2 \approx 11.07 \quad \|a_3\|^2 \approx 200 \quad \|a_4\|^2 \approx 4850.94$$

und damit definiert man

$$q_i = \frac{a_i}{\|a_i\|}.$$

Alternativ wurde vorgeschlagen die Standardbasis zu verwenden womit die Rechnung wesentlich leichter ausfällt, und wir sofort normalisieren:
1. Vektor 1 normalisieren $\Rightarrow q_0 := \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Da Vektor x bereits orthogonal zu 1 ist ($g(1,x) = 0$), reicht es x zu normieren $\Rightarrow q_1 := \frac{x}{\|x\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$.
3. Vektor x^2 steht senkrecht zu x, aber nicht zu 1! Somit ist der neue Vektor $q_2' := x^2 - g(x^2, v_1)v_1 = x^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow q_2 := \frac{q_2'}{\|q_2'\|} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{8}}(x^2 - \frac{1}{3})$.
4. Vektor x^3 steht zwar senkrecht glücklicherweise senkrecht auf 1 und x^2 und deshalb auch auf q_0 und q_2! Somit ist $q_3' := x^3 - g(x^3, p_1)q_1 = x^3 - \frac{3}{5}x \Rightarrow q_3 := \frac{q_3'}{\|q_3'\|} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\frac{5}{2}(x^3 - \frac{3}{5}x)$.

c) Wir geben die Matrix L nur bezüglich der 2. Rechnung an in der die Standardbasis $\{1, x, x^2, x^3\}$ orthonormalisiert wurde. Wir ignorieren nun bewusst, dass wir die Koordinaten der neuen Basis bezüglich der alten ablesen können, und gehen auf das allgemeine Prinzip ein:
Da $1 \mapsto q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist die erste Spalte durch

$$(\frac{1}{\sqrt{g(1,1)}}, 0, 0, 0)^T = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0)^T$$

gegeben.
Analog $x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$ und die zweite Spalte ist

$$\left(-\frac{g(x, q_0)}{\sqrt{g(q_1', q_1')}}, \frac{1}{\sqrt{g(q_1', q_1')}}, 0, 0\right)^T = (0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, 0, 0)^T$$

Weiter $x^2 \mapsto \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{8}}(x^2 - \frac{1}{3})$ und die dritte Spalte ist in allgemeiner Schreibweise

$$\frac{1}{\sqrt{g(q_2', q_2')}} \left(-g(x^2, q_0), -g(x^2, q_1), 1, 0\right)^T$$

und analog

$$\frac{1}{\sqrt{g(q_3', q_3')}} \left(-g(x^3, q_0), -g(x^3, q_1), -g(x^3, q_2), 1\right)^T$$

2. a) Da die Basis $\mathcal{A}$ gerade orthonormal bezüglich g ist, gilt $g_{ij} = \delta_{ij}$. Die Basis $\mathcal{A}$ ist in Standardkoordinaten $\mathcal{E}$ gegeben durch

$$a_i = A_{ki}e_k$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nutzen wir die Matrixschreibweise und bezeichnen $(g_{ij}) = G = \mathbb{1}$ und $(\tilde{g}_{ij}) = \tilde{G}$, dann

$$\delta_{ij} = g(a_i, a_j) = g(A_{ki}e_k, A_{lj}e_l) = A_{ki}\tilde{g}_{kl}A_{lj} = A_{ik}^T\tilde{g}_{kl}A_{lj}$$

See next page!

und equivalent

$$\mathbb{1} = A^T \tilde{G} A \iff \tilde{G} = A^{-T} A^{-1}.$$

Da

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

ist somit

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & -10 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & -67 & -35 \\ -67 & 110 & 57 \\ -35 & 57 & 30 \end{pmatrix}$$

b) $\mathcal{A}$ ist orthonormal zu g so dass $\mathcal{A}^g = \mathcal{A}$. Sei $\{b^i\}$ die reziproke Basis von $\mathcal{E}$, und schreibe $b^i = B^i_j e_j$. Dann soll gelten, dass

$$\delta^i_j = g(b^i, e_j) = B^i_k g(e_k, e_j) = B^i_k \tilde{g}_{kj}$$

also muss (B^i_k) die Inversematrix von $\tilde{G}$ definieren, also

$$(B^i_k) = \tilde{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 51 & 15 & 31 \\ 15 & 5 & 8 \\ 31 & 8 & 21 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathcal{A}^g = \left\{ b^1 = \begin{pmatrix} 51 \\ 15 \\ 31 \end{pmatrix}, \ b^2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \ b^3 = \begin{pmatrix} 31 \\ 8 \\ 21 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Wir haben $[v]_{\mathcal{E}} = (2, 1, 0)^T$ oder $v = v^j e_j$. Da die Koordinaten kontravariant wechseln, und A die Matrix vom Basiswechsel $\mathcal{E}$ zu $\mathcal{A}$ darstellt, gilt

$$[v]^i_{\mathcal{A}} = (A^{-1})^i_j v^j = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & -10 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da $\mathcal{A}$ orthonormal bezüglich g ist, sind die kovarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{A}$ ebenfalls

$$[v]_{\mathcal{A}^g} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}^g}$ können wir auf zwei verschiedenen Weisen berechnen: Entweder wir betrachten $[v]_{\mathcal{E}}$ und nutzen die Beziehung, dass

$$[v]^T_{\mathcal{E}^g} = \tilde{G}[v]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 41 & -67 & -35 \\ -67 & 110 & 57 \\ -35 & 57 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -24 \\ -13 \end{pmatrix}$$

oder verwenden, dass die Koordinaten kovariant Wechseln: $[v]_{\mathcal{E}^g} A = [v]_{\mathcal{A}^g}$ also

$$[v]_{\mathcal{E}^g} = [v]_{\mathcal{A}^g} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -24 & -13 \end{pmatrix}$$