Lösungen 9

1. **a)** Sei $\mathcal{B} = \{b_j\} = \{1, x, x^2\}$ und $\mathcal{B}^g = \{b^j\}$. Die Dualbasis $\mathcal{B}^* = \{\beta_1, \beta_x, \beta_{x^2}\}$ von $\{1, x, x^2\}$ gibt gerade die Koeffizienten eines Polynoms $p(X) = aX^2 + bX + c$, so dass $p(t_0) = at_0^2 + bt_0 + ct_0 = t_0^2\beta_{x^2}(p) + t_0\beta_x(p) + t_0\beta_1(p)$ und damit $[\varphi_{t_0}]_{\mathcal{B}^*} = (1, t_0, t_0^2)$

b) Sei $r(X) = aX^2 + bX + c$. Wir betrachten die Basis $(1, X, X^2)$ von V. Indem wir ϕ_{t_0} auf die drei Basisvektoren anwenden erhalten wir:

- $g(1, r) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 1$
- $g(X, r) = t_0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = t_0$
- $g(X^2, r) = t_0^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} = t_0^2$

Löst man dieses Gleichungssystem auf, erhält man

$$r(X) = (180t_0^2 - 180t_0 + 30)X^2 + (-180t_0^2 + 192t_0 - 36)X + 30t_0^2 - 36t_0 + 9.$$

Wir hätten r auch via dem kanonischen Isomorphismus zwischen V und V^* finden können: Dieser identifiziert die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$ von $\mathcal{B}$ in V mit der dualen Basis $\mathcal{B}^*$ von V^* in dem $b \in \mathcal{B}^g$ auf $p \mapsto g(p, b)$ abgebildet wird. Ist $r = r_k b^k$, dann $\varphi_{t_0}(p) = g(p, r) = r_k g(p, b^k) = r_k \beta^k(p)$, also $[r]_{\mathcal{B}^g} = (1, t_0, t_0^2)^T$.

Alternativ bestimmen allgemein g^{ij}! Dafür rechnen wir die Integrale $g(1, 1) = \int 1 = 1$, $g(1, x) = \int x = 1/2$, $g(x, x) = g(1, x^2) = 1/3$, $g(x, x^2) = 1/4$ und $g(x^2, x^2)$ aus. Also

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

und

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}.$$

Per Definition von $\mathcal{B}^g$, dass $g(b_j, b^k) = \delta_j^k$. Andererseits ist $g(b_j, b^k) = g_{jl}(b^k)^l$ also besteht b^k genau aus den Spalten der Inversenmatrix (g^{ij}) von (g_{ij}). Also $\varphi_{t_0}(p) = t_0^2\beta_{x^2}(p) + t_0\beta_x(p) + t_0\beta_1(p)) = t_0^{k-1}g(p, b^k) = g(p, t_0^{k-1}b^k)$ also $[r]_{\mathcal{B}^g} = t_0^{k-1}b^k$. Da b^k nun explizit ermittelt wurde, können wir auch r bezüglich $\mathcal{B}$ darstellen, und bekommen das gleiche Ergebnis wie im ersten Ansatz.

2. **a)** Seien $\{b_1, \ldots, b_n\}$ die Elemente der Basis $\mathcal{B}$. Sei Matrix $G = (g_{ij})$ definiert durch $g_{ij} = g(b_i, b_j)$ und $A_i^j = f(b_i)^j$. Weiter ist wegen Bilinearität $g(f(u), f(v)) = g(u, v)$ für alle $u, v \in V$ equivalent mit $g(f(b_i), f(b_j)) = g(b_i, b_j)$ für alle i, j. Damit finden wir

$$g_{ij} = g_{kl}A_i^k A_j^l = (A^T)_k^i g_{kl} A_i^l \Leftrightarrow G = A^T G A.$$

Ist $\mathcal{B}$ orthonormal, also $G = \mathbb{1}$ die Identitätsmatrix, dann ist f orthogonal genau wenn $A^T A = \mathbb{1} \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$

Please turn over!

b) Wir können die möglichen Werte von α auf folgender Art finden: V ist orthogonal, falls $V^\top V = I_2$. Da $I_2^\top = I_2$ und $(u\,u^\top)^\top = u\,u^\top$, folgt

$$\begin{aligned}
V^\top =& (I_2 - \alpha u\,u^\top)^\top = I_2 - \alpha u\,u^\top = V \text{ und damit} \\
V^\top V =& V\,V = (I_2 - \alpha u\,u^\top)\,(I_2 - \alpha u\,u^\top) \\
=& I_2\,I_2 - 2I_2\,\alpha u\,u^\top + \alpha u\,u^\top\,\alpha u\,u^\top \\
=& I_2 - 2\alpha u\,u^\top + \alpha^2 u\,\underbrace{u^\top u}_{=1}\,u^\top \\
=& I_2 + (-2\alpha + \alpha^2) u\,u^\top
\end{aligned}$$

Da $u\,u^\top \neq I_2$, gilt $V^\top V = I_2$ genau dann, wenn $-2\alpha + \alpha^2 = 0$, also für $\alpha = 2$ oder $\alpha = 0$ (dann ist $V = I_2$ trivialerweise orthogonal).

c) Die Matrix von F_u bezüglich der orthonormalen Basis $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ist die Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(1-2u, 1, 1, -1)$. Eine Diagonalmatrix ist genau dann orthogonal, wenn die Einträge Norm gleich 1 haben, also ist $u \in \{0, 1\}$.